

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
HERAUSGEGEBEN VON
K. W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING
GRAZ WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG
PAUL URBAN
GRAZ

7. BAND, 1. HEFT
MIT 35 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM APRIL 1953)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen.

Allgemeines. Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anblich schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigensten Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerfen; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabwieslichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5 oder an den Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastel 5, zu richten.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenen Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Inhaltsübersicht: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. ... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

7. Band/1. Heft.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hinteregger, H. Induktionserscheinungen bei Bewegung von Materie in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten. I: Experimentelle Grundlagen	1
Überall, H. Der Photoeffekt im homogenen elektrischen Feld	14
Florian, A. Zur Erzeugung von Mesonen beim Durchgang durch Materie	23
Haefler, R. Die Zündspannung von Gasentladungen unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes im Druckbereich von 10 bis 10^{-8} Torr	52
Eder, G. Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie	91
Baumann, K. Eine einfache Herleitung der Streuformel von BHABHA	96
Baumann, K. Zur Definition der relativistischen Teilchen-Antiteilchen-Wellenfunktion	98
Hiltmair, O. Die Geometrie der Winkelverteilung von Kernreaktionen	102
Smekal, A. G. Dynamik des spröden Zugbruches von zylindrischen Glasstäben	110
Buchbesprechungen	123

1127 m

Induktionserscheinungen bei Bewegung von Materie in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten.

I. Experimentelle Grundlagen.

Von

H. Hinteregger.

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Wien.

Mit 10 Abbildungen.

(Eingelangt am 10. Oktober 1951.)

Zusammenfassung.

Diskussion der als „Unipolarinduktion“ bekannten Effekte. Phänomenologische Systematik der stationären Induktionseffekte und Beschreibung einfacher Experimente, die zur deutlichen objektiven Demonstration der Grunderscheinungen geeignet sind. Für die theoretische Behandlung und Ableitung der Berechnungsgrundlagen wird auf die Teile II und III, für konkrete meßtechnische Anwendungen auf Teil IV dieser Arbeit verwiesen.

Einleitung.

Experimentelle Untersuchungen über elektromagnetische Effekte, die bei der Bewegung von Materie im äußeren Magnetfeld oder bei der Bewegung von permanenten Magneten auftreten können, sind im Laufe der historischen Entwicklung stets wichtige Prüfsteine für die in Fluß befindlichen physikalischen Vorstellungen und Theorien gewesen. Ein überwältigend großer Teil der experimentellen Entdeckungsarbeit auf diesem Gebiet geht unmittelbar auf FARADAY zurück. Sein intuitives Genie deutete die eigenen Versuche ohne das Rüstzeug der heute vorhandenen theoretisch-mathematischen Grundlagen mit einer derartigen Klarheit, daß viele seiner Anschauungen und Aussprüche, über die im Anschluß entstandenen und einander ablösenden Theorien hinweg, auch heute noch zu ehrfürchtiger Bewunderung zwingen.

Auf die historisch gewordenen grundlegenden Versuche von FARADAY, ARAGO, ROWLAND, EICHENWALD, RÖNTGEN und WILSON wird in den meisten Lehr- und Handbüchern der Elektrodynamik¹

¹ Vgl. z. B. G. MIE, Elektrodynamik in Wien-Harms, Hdb. d. Exp.-Phys., Bd. XI, S. 248 ff. (AVG, Leipzig 1932); R. BECKER, Theorie der Elektrizität, Bd. II, S. 210 ff. (Teubner, Leipzig 1949).

hinreichend ausführlich eingegangen, so daß wir deren Schilderung wohl unterlassen können. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß eine ganze Reihe von experimentellen Untersuchungen in weiten Kreisen der neuen Zeit völlig unbekannt sind, wie unter anderem auch aus der Bemerkung R. Beckers hervorgeht, der in seinem bekannten Lehrbuch der Elektronentheorie (I. c.) anlässlich der relativistischen Erklärung der elektrischen Polarisierung eines bewegten Magneten folgendes schreibt: „In der Literatur werden experimentelle Beweise für die Realität dieses zweiten Effektes nicht angegeben. Man könnte daher glauben, daß er sich wegen seiner Kleinheit bisher der Beobachtung entzogen hätte. Tatsächlich ist aber der durch (62, 2) beschriebene Effekt in der *Technik* seit langem unter dem Namen „Unipolarinduktion“ bekannt, usw.“ Hiergegen muß bemerkt werden, daß von SWANN, KENNARD, BARNETT, und anderen mehr eine umfangreiche, durchaus nicht technisch, sondern rein physikalisch orientierte experimentelle Forschungsarbeit geleistet wurde, wobei die Bezeichnung „Unipolar Induction“ ganz allgemein für verschiedenste Arten der stationären Induktion durch Bewegung von Materie verwendet wurde² und nicht bloß für Induktionseffekte bei rotierenden permanenten Magneten. Die Ursache für die weitgehende Entfremdung unserer Physikergeneration gegenüber dem bereits vorhandenen experimentellen Tatsachenmaterial der Unipolarinduktion (im allgemeinen Sinn) dürfte hauptsächlich in der Wandlung der wissenschaftlichen Situation zu suchen sein, die auf diesem Arbeitsgebiet seit den Zeiten von ARAGO und FARADAY bis heute stattgefunden hat. Diese Wandlung hat unter dem Eindruck der Erfolge der MINKOWSKISCHEN Theorie vielfach zu dem übereilten Schluß geführt, daß eine wissenschaftliche Grundlagenforschung auf dem Gebiet der sogenannten Unipolarinduktion und anderer Induktionserscheinungen in bewegter Materie heute nur mehr einer an sich überholten physikalischen Fragestellung wie etwa über „mitbewegte Kraftlinien“, „ruhender Äther“ oder dergleichen entspringen kann.

Die Bezeichnung „*Unipolarinduktion*“ ist historisch bedingt und umfaßt keineswegs bei jedem Autor die gleiche Gruppe von Erscheinungen der Induktion in bewegter Materie. Die ursprüngliche Bedeutung des Wortes „unipolar“ besteht darin, daß die entsprechenden Erscheinungen auch durch einen *isolierten* (unipolaren) *Magnetpol* hervorgerufen werden müßten, falls es einen solchen gibt. Im Sprachgebrauch der elektrotechnischen Anwendungen soll diese Bezeichnung wohl lediglich die unmittelbare, das heißt kommutatorlose Methode der Gleichstromerzeugung in der sogenannten „Unipolarmaschine“ gegenüber den üblichen Methoden der technischen Erzeugung von Gleichstrom durch

² Vgl. die zusammenfassende Darstellung von W. F. G. SWANN (Phys. Rev. Vol. XV, Ser. II, 365—398, 1920) und die von J. T. TATE (Bull. Nat. Res. Council, Vol. 4, part 6, Nr. 24, S. 75—95, 1922) in denen auch eine Reihe weiterer Literaturzitate zu finden ist.

Gleichrichtung primär erzeugter Wechselströme hervorheben. Freilich wäre es dann sprachlich erheblich klarer, die Bezeichnung „Unipolarinduktion“ durch die weit treffendere Bezeichnung „Isopolare Induktion“³ zu ersetzen, wodurch jede überflüssige Bezugnahme auf etwa existierende singuläre Magnetpole vermieden und einfach zum Ausdruck gebracht würde, daß es sich hier um Induktion von Spannungen gleichbleibender Polarität (also isopolarer Spannungen) handelt. Da eine, wenn auch noch so gerechtfertigte, Umbenennung leicht zu Mißverständnissen führt, wird jedoch vorläufig entweder an der historischen Bezeichnung festgehalten oder eine klare Umschreibung mit etwas mehr Worten verwendet werden (z. B. stationäre Induktion durch Bewegung oder dergleichen).

Phänomenologische Systematik.

Um im Rahmen dieser Arbeit Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir ausdrücklich festlegen, daß die Bezeichnung „Unipolarinduktion“ im weitesten Sinn für alle jene Erscheinungen verwendet werden soll, bei denen in bewegter Materie beim Vorhandensein primärer Magnetfelder elektrische Spannungen oder Ströme entstehen, die der Messung im Laboratorium (zumindest grundsätzlich) zugänglich sind. Um keine Überdeckung mit anderen Effekten berücksichtigen zu müssen, setzen wir voraus, daß die betrachtete Materie ohne Bewegung, aber unter sonst gleichen Bedingungen, elektrisch feld- und stromfrei ist.

Die wichtigste Erscheinungsgruppe, mit der wir uns fast ausschließlich beschäftigen werden, ist dadurch gekennzeichnet, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Materiebewegung, das magnetische Feld und die induzierten elektrischen Effekte für die Beobachtung im Laboratorium *stationär* sind, oder doch zumindest als quasistationär betrachtet werden können⁴. Die beachtliche Vielfältigkeit der verschiedenen Effekte dieses Erscheinungsgebietes möge an Hand der folgenden Systematik gezeigt werden, in der als ordnende Gesichtspunkte

die Art der Erzeugung des primären Magnetfeldes, der Bewegungscharakter der betrachteten Materie, ihre Leitfähigkeit und Permeabilität, der Bewegungszustand des magnetischen Erregersystems und das Auftreten, bzw. Fehlen merklicher Wirbelströme gewählt wurden. Auf entsprechende, zur Demonstration geeignete Experimente wird fallweise als Beispiel hingewiesen werden, ihre Beschreibung erfolgt erst im nächsten Abschnitt.

³ Dieser treffliche Vorschlag wurde von Herrn Prof. Dr. F. REGLER anläßlich einer Diskussion mit dem Verfasser gemacht.

⁴ In einer Veröffentlichung des Verfassers im Österr. Ing.-Archiv (VI, 93, 1952) wurde die Bezeichnung „Unipolarinduktion“ sogar ausdrücklich auf die stationären Effekte der Bewegungsinduktion in leitender Materie beschränkt.

Das *primäre Magnetfeld* kann gegeben sein durch:

I. Eine permanente Magnetisierung der betrachteten Materie selbst (Abb. 1).

II. Ein außerhalb der betrachteten Materie befindliches magnetisches Erregersystem (Permenentmagnete oder Stromwicklung) (Abb. 2).

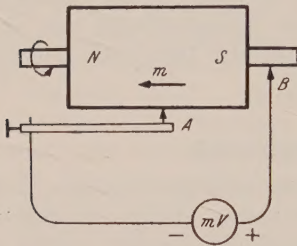


Abb. 1. Permanentmagnet rotiert um Symmetrieachse der Magnetisierung. *A* und *B* sind Schleifkontakte eines im Laboratorium ruhenden Meßkreises.

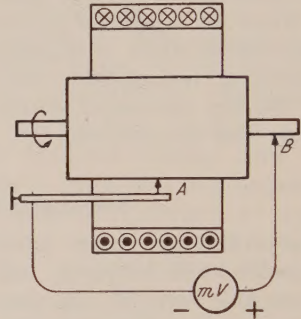


Abb. 2. Ein magnetisierbarer oder nicht magnetisierbarer leitender Drehkörper wird in einem, von außen durch ruhende oder mitgedrehte Erregewicklungen erzeugten stationären Magnetfeld gedreht. *A* und *B* sind Schleifkontakte eines ruhenden Meßkreises.

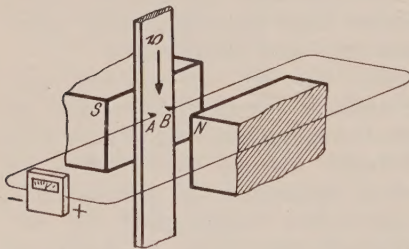


Abb. 3. Leiterstreifen oder Leiterstab wird durch ein Magnetfeld bewegt. *A* und *B* sind Schleifkontakte des im Laboratorium ruhenden Meßkreises.

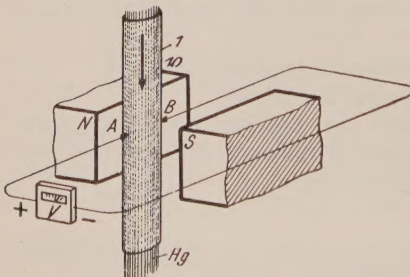


Abb. 4. Eine leitende Flüssigkeit strömt durch ein Isolatorrohr im transversalen Magnetfeld. *A* und *B* sind Wandkontakte des Meßkreises an die strömende Flüssigkeit (Quecksilber).

Der *Bewegungscharakter der betrachteten Materie* als:

1. Translation als starrer Körper (Abb. 3).

2. Rotation als starrer Körper (Abb. 1).

3. Allgemeine stationäre Bewegung (z. B. Strömung einer zähen Flüssigkeit oder dergleichen) (Abb. 4).

Die Materieeigenschaften:

1. Nichtmagnetisierbare Materie (Abb. 2, wobei Zylinder z. B. Cu).

2. Magnetisierbare Materie (Abb. 2, wobei Zylinder z. B. Fe).

(Zur Kennzeichnung der Leitfähigkeit, bzw. der Relaxationszeit soll keine eigene Kennziffer eingeführt werden, da stets näher erklärt werden muß, was im individuellen Fall hier als „klein“ oder „groß“ zu verstehen ist.)

Bewegungszustand des magnetischen Erregersystems:

1. Das Erregersystem des primären Magnetfeldes ruht im Laboratorium,
2. es macht im Fall der starren Translation oder Rotation der betrachteten Materie diese Bewegung als starrer Körper mit,
3. das Erregersystem bewegt sich selbst anders als die betrachtete Materie.

Auftreten von Wirbelströmen:

a) Stromfreie Induktion ohne merkliche Rückwirkung auf das Primärfeld der Bewegung und des magnetischen Feldes.

b) Merklich strombehaftete Induktion mit entsprechender JOULEscher Erwärmung und Rückwirkungen.

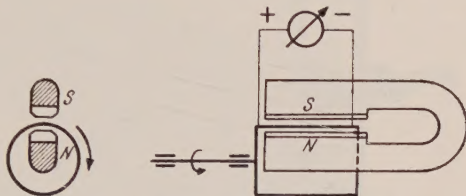


Abb. 5. Ein leitender Hohlzylinder rotiert in einem Magnetfeld, das auf einen kleinen Arbeitsbereich konzentriert ist. Die starke Abweichung von der Rotationssymmetrie bedingt kräftige Wirbelströme.

Die hier angegebene systematische Zusammenstellung sollte nicht nur auf die Vielfältigkeit der experimentellen Möglichkeiten hinweisen, sondern auch eine möglichst kurze und trotzdem deutliche Bezugnahme in dieser Arbeit erleichtern, indem die angegebenen Kennziffern einfach aneinandergereiht werden: es entspricht also beispielsweise der Anordnung nach Abb. 5 die Kennzeichnung II. 2. 1. 1. b.

Demonstrationsversuche⁵.

Die objektive und deutliche Demonstration von Induktionseffekten zufolge Materiebewegung als Vorlesungsexperiment bereitet eine Reihe bekannter Schwierigkeiten, die nicht zuletzt darauf zurückzuführen sind, daß hauptsächlich nichtstationäre Bewegungen verwendet werden und daß sich die Vorführung einiger weniger Unipolarinduktions-Erscheinungen mit „historischen“ Apparaten meist auf qualitative Demonstration beschränkt.

Da auch vom didaktischen Standpunkt aus eine größere Zahl von quantitativ diskutierbaren elektrodynamischen Vorlesungsexperimenten über bewegte Materie begrüßt werden dürfte, sollen im folgenden einige brauchbare Anordnungen beschrieben werden, die mit relativ einfachen Mitteln aufgebaut werden und trotzdem einen quantitativen Eindruck vermitteln können. Hierbei handelt es sich lediglich um Beispiele, da

⁵ Die hier geschilderten Versuche wurden zum größten Teil während eines Experimentalvortrages des Verfassers im Hörsaal des II. Phys. Inst. der Universität Wien vorgeführt. (7. 11. 1950, Chemisch-Physikalische Gesellschaft.)

für eine erschöpfende Behandlung in diesem Rahmen kein Platz beansprucht werden kann. Wir schließen nun die schlagwortartige Erklärung unmittelbar den entsprechenden Abbildungen an:

Zu Abb. 6:

Ein handförmiger nicht zu kurzer Leiterstab 1 kann in die Führung (im abgebildeten Fall einfach vier Nägel) eines Holzklotzes 2 leicht verschieblich eingebracht und fallweise gegen einen Stab aus anderem Material ausgetauscht werden. Die beiden Schleifkontakte A, B (Messingfedern) führen zu einem geeigneten Anzeiginstrument (niederohmiges Nullinstrument oder Hörsaalgalvanometer).

Bereits verblüffend langsame Auf- und Abbewegungen des Stabes mit fallweisem Entfernen oder Umdrehen des Stabmagneten liefern eine besonders einfach überblickbare und verlässliche qualitative Demonstrationsmöglichkeit zur Abhängigkeit der sogenannten Lorentz-Kraft von der Bewegung und der Magnetfeldrichtung.

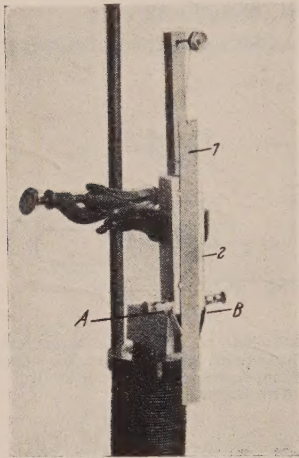
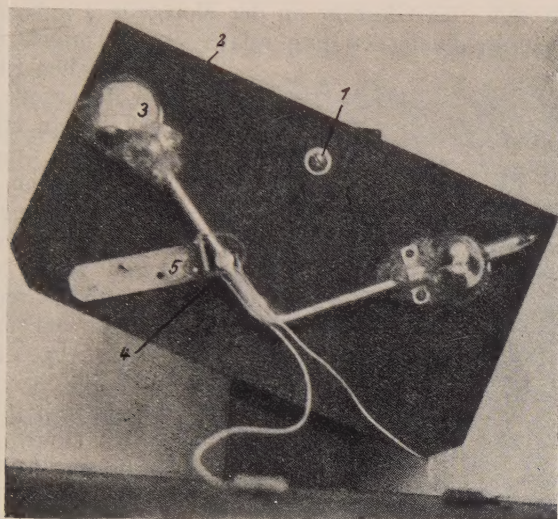


Abb. 6. Demonstrationsversuch zur Induktion translatorisch bewegter Materie im Magnetfeld.

Der einfachste Übergang zu quantitativen Demonstrationen bietet sich durch Hochziehen des (für diesen Fall am besten etwas längeren) Leiterstabes durch eine Schnur, die von einem sehr langsam und gleichförmig bewegten Rad (Antrieb z. B. durch Schallplattenmotor mit Übersetzung ins Langsame) aufgewickelt und sodann wieder heruntergelassen werden kann.

Von den vielfältigen Demonstrationsmöglichkeiten mit dieser mit einfachsten Mitteln herstellbaren Anordnung seien bloß die folgenden Beispiele erwähnt: meßbare Veränderung der Geschwindigkeit durch Aufsetzen verschieden großer Räder für die Aufwicklung der Schnur; Einsetzen von Leiterstäben aus verschiedenem Material (bezüglich Leitfähigkeit und Ferromagnetismus) mit Nachweis, daß die sogenannte LORENTZ-Kraft nicht von der magnetischen Feldstärke (Erregung), sondern nur von der magnetischen Induktion (Kraftflußdichte) abhängt und auch von der Leitfähigkeit unabhängig ist; Nachweis, daß wegen der äußerst kleinen Relaxationszeit von Leitern auch bei nicht stationärer Bewegung der Induktionseffekt nur vom Momentanwert der Geschwindigkeit abhängt, indem der Leiterstab durch ein Schubkurbelgetriebe zuerst so langsam bewegt wird, daß der harmonische Verlauf der induzierten Spannung am Hörsaalgalvanometer deutlich verfolgbar ist. Im Anschluß hieran kann bei hohen Drehzahlen des Getriebes die Demonstration mit Hilfe eines Verstärkers und Kathoden-

strahl-Oszillographen fortgesetzt werden. (Variante: Befestigung des Leiterstabes an einer steifen Blattfeder, deren gedämpfte Schwingungen sich im Oszillogramm der Induktionsspannung widerspiegeln); An-



a

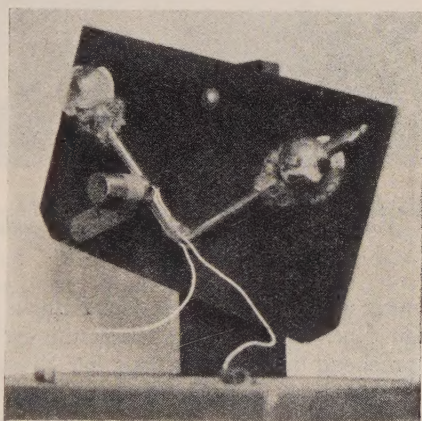
bringung eines Nebenschlusses an das Spannungsmeßgerät (wo- von der Meßeffect praktisch unberührt bleibt, so lange der Nebenschluß nicht zu nieder- ohmig ist).

Zu Abb. 7:

Qualitative Demonstration der Induktion in bewegten

Leiterflüssigkeiten. Durch Schwenken des um τ drehbaren Teiles 2 kann das Quecksilber im Glasrohr 3 in entgegen- gesetzten Richtungen bewegt werden. Das Glasrohr hat an beiden Enden kugelförmige Ge- fäße angeschmolzen; bei der Herstellung wird eine Kugel und das Rohr mit Hg gefüllt, sodann evakuiert und abgeschmolzen. Zwei in das Rohr an

der Stelle 4 eingeschmolzene Platinelektroden (Verbindungsline der Kontaktstellen möglichst senkrecht zur Strömungsrichtung) führen



b

Abb. 7. Demonstrationsgerät zur Induktion in bewegten Leiterflüssigkeiten.

zu einem Anzeiginstrument (niederohmiges Nullinstrument oder Hörsaalgalvanometer). In die Halterung 5 kann ein Stabmagnet eingebracht werden, dessen Feld im wesentlichen senkrecht zur Strömungsrichtung und senkrecht zur Verbindungslinie der Kontakte orientiert ist. Es empfiehlt sich, das Glasrohr an der Meßstelle 4 auf einen dünnen Querschnitt breitzuquetschen (um relativ lange Durchströmzeiten in

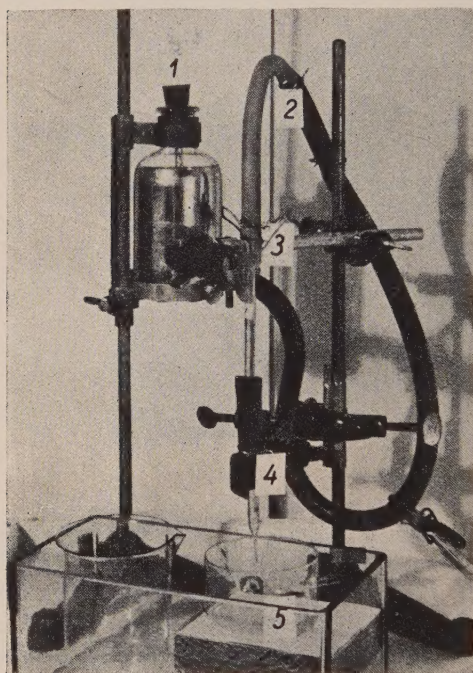


Abb. 8. Einfaches Quecksilbermagnetometer für Demonstrationszwecke, das gleichzeitig für laboratoriumsmäßige Messungen von Magnetfeldern geeignet ist.

der gleichen Richtung und trotzdem große Spannungsausbeute zu erhalten). Die langsamen mechanischen Schwingungen des Quecksilbers zufolge seiner Trägheit sind am Galvanometer sogar dann noch erkennbar, wenn sich für die Beobachtung mit dem freien Auge die Quecksilberniveaus bereits beruhigt zu haben scheinen.

Mit einer, Abb. 7 sehr ähnlichen linearen Anordnung (ähnlich einer Sanduhr) können bereits quantitative Demonstrationen durchgeführt werden, ohne mit offenem Quecksilber arbeiten zu müssen. Die Geschwindigkeit kann verändert werden, indem man nach dem jeweiligen Kippen der Anordnung verschiedene Winkel des Glasrohres zur Lotrechten einstellt. Da die Geschwindigkeit der Quecksilberströmung

unmittelbar nach dem Kippen um 180 Grad wegen der Trägheit mit Null beginnt, ein Maximum erreicht und dann sehr langsam⁶ entsprechend der Verringerung der Niveaudifferenz abfällt, nimmt man für quantitative Vergleiche am besten dieses sehr bequem ablesbare Maximum. Für relativ große Kugelquerschnitte im Vergleich zum Querschnitt an der Meßstelle, bleibt die Geschwindigkeit leicht so lange praktisch konstant, daß in dieser Zeit verschiedene Veränderungen mit dem Probemagneten vorgenommen und ihre Auswirkungen auf den Meßeffect gezeigt werden können (Entfernen, Annähern, rasches Um-

⁶ Sehr langsam natürlich nur dann, wenn das Glasrohr an der eigentlichen Meßstelle auf einen dünnen Querschnitt gequetscht wurde.

drehen des Magneten, Veränderung des Winkels zwischen der Magnetfeldrichtung und der Ebene, die durch die Strömungsrichtung und die Verbindungslinie der Kontaktstellen gegeben ist). Für quantitative Demonstration besser geeignet ist jedoch die folgende Anordnung.

Zu Abb. 8:

Aus einer MARIOTTESchen Flasche 1 strömt Quecksilber durch ein Rohr 2 mit zwei Platinkontakten an der Stelle 3 und eine Düse 4 zur Regelung der Strömungsgeschwindigkeit in ein Meßglas 5. Durch Ablesen des durchgeströmten Volumens und Stoppen der hierzu benötigten Zeit kann der Flächenmittelwert der Geschwindigkeit über den Querschnitt ermittelt werden. Alles übrige ist aus der Diskussion zu Abb. 2 verständlich. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß diese

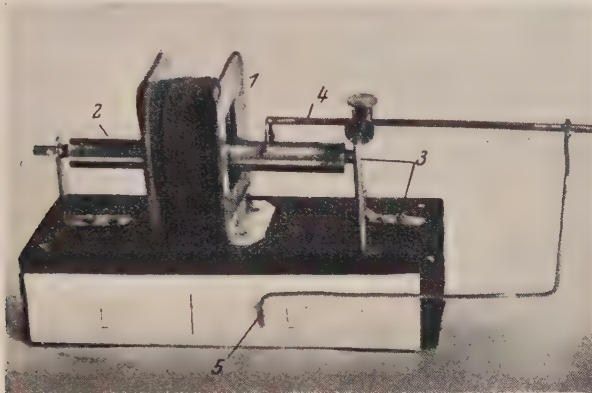


Abb. 9. Demonstration der stationären Rotationsinduktion.
a) Starke Wirbelstrombremsung. b) Wesentlich schwächere Bremsung.

Anordnung bereits zu äußerst verlässlichen laboratoriumsmäßigen Messungen von Magnetfeldern geeignet ist und die Methode hat beispielsweise gegenüber ballistischen Messungen den großen Vorteil einer stationären, bzw. den jeweiligen Momentanwert des Magnetfeldes anzeigenden Zeigerablesung. Als Beispiel kann die kontinuierliche Aufnahme einer Hysteresis-Kurve verwendet werden. Auf die schönen Erweiterungsmöglichkeiten der Demonstrationen bei Registrierung der Meßspannung mit Hilfe eines Verstärkers und Oszillographen, dessen Horizontalablenkung durch den elektrischen Strom der Magnetfelderregung gesteuert wird, kann hier nicht näher eingegangen werden.

Zu Abb. 9: In einer Spule 1 befindet sich ein zylindrischer Leiterkörper 2, der durch einen Motor konstanter Drehzahl (z. B. Synchro-motor) um seine Achse gedreht wird. Als dauernd festliegende Kontaktstelle 3 fungiert das unmittelbare Achsengebiet; der zweite

Schleifkontakt 4^7 befindet sich am Umfang und ist in achsialer Richtung verschiebbar, wobei die jeweilige Stellung des Meßkontaktes durch den Zeiger 5 auf der Längenskala 6 zu ersehen ist. Man schickt nun durch die Spule 1 einen konstanten Strom und ermittelt die Induktionsspannung U als Funktion der jeweiligen Stellung x . Ist der Zylinder 2 unmagnetisch (z. B. eisenfreies Kupfer oder Messing), dann liefert die entsprechende Kurve $U = U(x)$ bis auf einen der Drehzahl proportionalen Umrechnungsfaktor unmittelbar das Flächenmittel der achsialen Komponente der magnetischen Induktion $\bar{B}_x$ über den jeweiligen durch den Zylinderumfang an der Stelle x gebildeten Kreis (vgl. Teil III und IV dieser Arbeit), während die differenzierte Kurve dU/dx bis auf einen anderen Umrechnungsfaktor die radiale Komponente der Induktion B_r am Umfang des Zylinders für die jeweilige Stelle x widerspiegelt. Wird ein geometrisch gleicher Zylinder aus ferromagnetischem Material eingesetzt, dann entsprechen die Kurven jenen Werten von $\bar{B}_x$, bzw. B_r zufolge des Primärfeldes und des Zusatzfeldes der Magnetisierung. Man kann deutlich demonstrieren, wie die Induktionseffekte auch hier nicht etwa von $\mathfrak{H}$, sondern nur von $\mathfrak{B}$ abhängen, und die magnetische Feldverzerrung durch einen rotierenden Eisenzylinder praktisch identisch mit der Feldverzerrung zufolge des gleichen Zylinders im Zustand der Ruhe ist (indem man mit einer satt anliegenden Probespule die selben Messungen mit einem ballistischen Galvanometer durchführt). Gerade die Durchführung dieses grundlegenden Vergleiches läßt nebenbei die Vorteile der magnetischen Messungen mit Hilfe der Unipolarinduktion gegenüber der ballistischen Methode in vielfacher Beziehung in die Augen springen.

Zu Abb. 10:

Die Abb. 5 a und 5 b sollen einen anschaulichen Einblick in die Bedingungen für das *Auftreten von Wirbelströmen* in rotierenden Leiterkörpern bieten. Eine Scheibe 1 aus nichtmagnetisierbarem Metall wird in rasche Rotation versetzt. Die Achse der Scheibe hat leitenden Kontakt mit der aus dem gleichen Metall gefertigten Halterung 2 und bildet den einen Potentialabgriff, während der zweite

⁷ Gut bewährt hat sich ein feines Bündel Kupfer- oder Kupferbronzelitze und Schmierung durch einen Tropfen säurefreies Leichtöl; bei schwachen Magnetfeldern mit ins Gewicht fallenden Thermospannungen sind dann diese sowohl sehr klein als auch besonders stetig, wie überhaupt in unserem Fall die Kontaktgabe durch ein dünnes Litzenbündel, das unter mäßigem Druck (z. B. Spannung durch ein 50 g-Gewicht) einen kleinen Teil des Umfanges umschließt, weitaus besser geeignet ist, als etwa ein möglichst punktförmiger Platin-Schleifkontakt (wovon man sich leicht durch oszillographische Beobachtung überzeugen kann). Die Konstanz und Stetigkeit der Meßspannung kann ohne große Schwierigkeit in weiten Grenzen sichergestellt werden. Durch Doppelmessung mit entgegengesetztem Drehsinn läßt sich die tatsächliche Unipolarinduktionsspannung von etwa ins Gewicht fallenden Thermospannungen ohne Schwierigkeiten quantitativ trennen.

Potentialabgriff als Schleifkontakt 3 am Umfang der Scheibe ausgeführt ist. An 2 und 3 kann ein geeignetes Spannungsmeßgerät (z. B. ein Millivoltmeter) angeschlossen werden⁸.

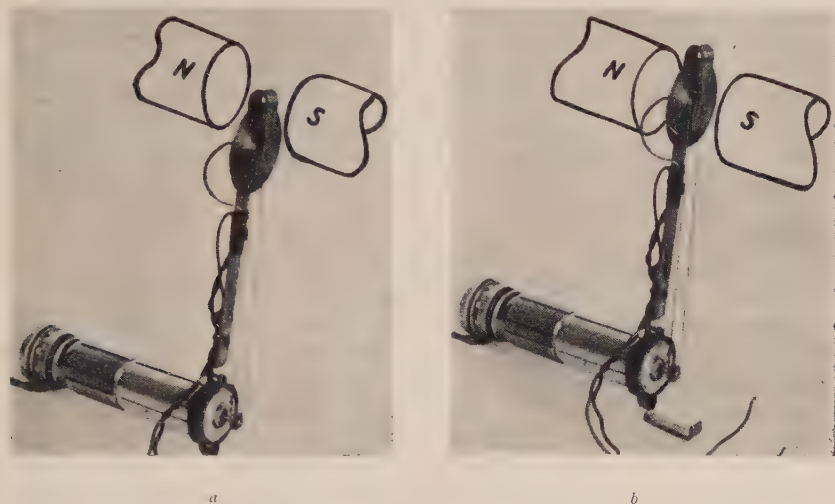


Abb. 10. Auftreten von Wirbelströmen, wenn das Magnetfeld bezüglich der Drehachse der Leiterscheibe nicht rotationssymmetrisch ist.

Solange der Scheibchendurchmesser klein im Hinblick auf die Inhomogenität des Magnetfeldes ist, kann die Anordnung als Magnetometer verwendet werden, wobei die Meßspannung $U = f \cdot \Phi$ ist ($f \dots$ Zahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit, $\Phi = (D^2 \pi)/4 \cdot B_n \dots$ Induktionsfluß durch die Leiterscheibe). Der maximale Ausschlag wird also dann erhalten, wenn die Drehachse der Scheibe parallel zur Richtung des Magnetfeldes gehalten wird.

Ist das Magnetfeld über den Bereich der Scheibe merklich inhomogen, dann können Wirbelströme auftreten. Es läßt sich nun sehr deutlich zeigen, daß das Auftreten von Wirbelströmen *nicht durch die Inhomogenität*, sondern durch die *Abweichung von der Rotationssymmetrie* des Magnetfeldes in bezug auf die Drehachse bedingt ist. Bei einer Demonstration des Verfassers wurde hierzu ein kleiner Elektromotor verwendet, der bei geringer Belastung deutlich hörbar in der Drehzahl abfällt. Nähert man die Induktionsscheibe den Polschuhen 4 eines stärkeren Elektromagneten, so läßt sich erreichen, daß etwa in der gerade in Abb. 10 a dargestellten Stellung, der Motor zufolge der Bremswirkung der Wirbelströme nahezu abstirbt, sich aber sofort

⁸ Eine völlig analoge Anordnung wurde bereits im Jahre 1905 von K. T. FISCHER publiziert, der eine als „Induktionsrädchen“ bezeichnete Anordnung zur Messung von Magnetfeldstärken entwickelte (Verh. D. Phys. Ges. 7, 434, 1905).

wieder erholt, wenn man die Scheibe so weit zwischen die Polschuhe hineinführt (vgl. Abb. 10 *b*), daß das Magnetfeld wieder einigermaßen rotationssymmetrisch zur Drehachse verläuft. Der Versuch ist besonders eindrucksvoll, weil gerade im Fall der Abb. 10 *b* das inhomogene Magnetfeld erheblich stärker als in Abb. 10 *a* ist.

Die Reihe der mit relativ einfachen Mitteln ausführbaren Versuche soll hier aus Gründen der Platzersparnis abgebrochen werden, da die in Teil IV dieser Arbeit beschriebenen meßtechnischen Anwendungsmöglichkeiten diese Reihe vor allem bezüglich quantitativ auswertbarer Experimente ergänzen. Dort finden sich auch entsprechende Literaturzitate.

Bemerkungen.

Obwohl die experimentelle Entdeckung und wesentlichste Erforschung der Induktionserscheinungen in bewegter Leitermaterie bereits auf FARADAY zurückgeht, erscheint die systematische und vor allem quantitative Untersuchung der experimentellen Grundlagen auch heute noch keineswegs überflüssig. Als Begründung kann angeführt werden:

Trotz der enormen Erfolge der relativistischen Elektrodynamik gibt es auch heute noch genügend viele Experimente, die für die theoretische Behandlung nicht bloß mathematische, sondern auch *prinzipielle Probleme* bieten (vgl. Teil III dieser Arbeit); dies dürfte wohl auch die Hauptursache für die teilweise unsicheren und oft beachtlich widerspruchsvollen Darstellungen in der vorhandenen Lehrbuch-, Handbuch- und Originalliteratur sein.

Zur Zeit der historischen experimentellen Untersuchungen im unmittelbaren Anschluß an FARADAY war das Interesse aller Arbeiten ausschließlich auf die empirische Stützung der in Fluß befindlichen physikalischen Vorstellungen und Theorien konzentriert. Heute sind viele der damals akuten Fragen theoretisch sinnlos geworden und so erklärt sich das an sich erstaunliche Aufhören der experimentellen Grundlagenforschung über die Elektrodynamik bewegter Materie in der neuen Zeit.

Die Fülle der meßtechnischen Anwendungsmöglichkeiten wurde überhaupt noch nicht systematisch erfaßt. Bisher sind lediglich einige wenige Originalarbeiten auf diesem Gebiet erschienen. Es soll nun in den folgenden Teilen dieser Arbeit versucht werden, eine systematisch angepaßte Basis für das zentrale physikalische Verständnis und zugleich die quantitative Berechnung für die bereits publizierten und weiteren noch zu erwartenden Anwendungsmöglichkeiten zu geben.

In Teil II werden die Translationsfälle eingehend theoretisch diskutiert, da ihre klare Erfassung die Basis für jene allgemeineren Fälle bietet, deren theoretisch exakte Erfassung den Rahmen der MINKOWSKISCHEN Theorie übersteigt. Eine für das physikalische Verständnis und

die Herleitung der Berechnungsgrundlagen der allgemeinen Fälle ausreichend erscheinende Behandlung wird in Teil III gegeben (im Rahmen einer entsprechend angepaßten LORENTZschen Theorie). In Teil IV werden die experimentellen Anwendungsmöglichkeiten zusammenfassend behandelt, wobei in detaillierter Form nur auf die bisher noch nicht publizierten Meßanordnungen und die Ableitung wichtiger Spezialfälle aus Teil III eingegangen wird.

Der Photoeffekt im homogenen elektrischen Feld.

Von

Herbert Überall, Wien.

(Eingelangt am 5. September 1952.)

Es wird untersucht, welche Veränderung die Winkelverteilung der Photoelektronen und der totale Wirkungsquerschnitt des Photoeffekts erfahren, wenn die Versuchsanordnung in ein homogenes elektrisches Feld gebracht wird. Es zeigt sich, daß die Änderung auch bei Anwendung hoher Felder sehr klein bleibt.

Der Photoeffekt läßt sich auf zwei verschiedene Arten behandeln: nach A. SOMMERFELD [1] durch stationäre Störungstheorie in einem klassischen Strahlungsfeld, oder nach der von W. HEITLER in „The Quantum Theory of Radiation“ [2] verwendeten Methode der zeitabhängigen Störungstheorie im quantisierten Strahlungsfeld. Wir wollen uns hier wegen ihrer rechnerischen Einfachheit und allgemeinen Übersichtlichkeit der letzterwähnten Methode bedienen. Die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt lautet dann

$$d\Phi = \frac{2\pi}{\hbar c} |H'|^2 \varrho_E d\Omega, \quad (1)$$

wobei die Dichte der Endzustände im Energieintervall dE

$$\varrho_E = \frac{\mu \dot{p}}{(2\pi \hbar c)^3}$$

beträgt; wir bezeichnen mit $\mu = mc^2$, mit m die Elektronenmasse und mit $\dot{p}$ den mit der Lichtgeschwindigkeit c multiplizierten Impuls des Elektrons. Für das Übergangsmatrixelement ist einzusetzen

$$H' = -\frac{e}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 c^2}{k}} \int \psi_a^* \dot{p}_e e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/\hbar c} \psi_b d\tau \quad (2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

e = Elektronenladung,

$k = h\nu$ (einfallendes Lichtquant),

$\dot{p}_e$ = Projektion des Impulsoperators $\mathbf{p}$ auf die Polarisationsrichtung $\mathbf{e}$ des Lichtquants $\mathbf{k}$,

ψ_a, ψ_b Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes.

Wir wollen uns darauf beschränken, den Photoeffekt unter folgenden vereinfachenden Bedingungen zu betrachten:

$$I \ll k \ll \mu \quad (3)$$

($I =$ Ionisationsenergie der betreffenden Elektronenschale): die Frequenz des Lichtquants soll also weit von der Grenzfrequenz des kontinuierlichen Spektrums entfernt sein, und ferner wird der nichtrelativistische Fall vorausgesetzt, so daß für ψ_a und ψ_b die entsprechenden SCHRÖDINGERSchen Wellenfunktionen verwendet werden können. Außerdem wollen wir nur den Photoeffekt der K -Schale betrachten.

Für ψ_a ist im Fall des homogenen elektrischen Feldes die Wellenfunktion des Elektrons der K -Schale im elektrischen Feld einzusetzen. Diese Wellenfunktion tritt beim STARK-Effekt auf, und T. GUSTAFSON [3] hat eine Methode angegeben, sie approximativ zu berechnen. Die SCHRÖDINGER-Gleichung des Problems

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} - eFz \right) \psi = 0$$

($F =$ Feldstärke des elektrischen Feldes) läßt sich in parabolischen Koordinaten r_1, r_2, φ mit

$$x = \sqrt{r_1 r_2} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{r_1 r_2} \sin \varphi, \quad z = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

durch den Ansatz

$$\psi = f_1(r_1) f_2(r_2) e^{im'\varphi}$$

separieren in die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} + D r \right) f = 0$$

($f = f_1, f_2, r = r_1, r_2$); die Bezeichnungen sind

$$A = \frac{m}{2\hbar^2} E, \quad B = \frac{m}{4\hbar^2} (Ze^2 \mp \beta), \quad C = -\frac{m'^2}{4}, \quad D = \mp \frac{m}{4\hbar^2} eF.$$

Im Grundzustand ist die magnetische Quantenzahl $m' = 0$ und $E = E_1$. β ist eine Separationskonstante.

Nun werden die für jede Energiestufe individuell verschiedenen parabolischen Koordinaten $x_1 = 2r_1 \sqrt{-A}$, $x_2 = 2r_2 \sqrt{-A}$ eingeführt und der Ansatz gemacht

$$f_1 = x_1^{-1/2} U_1, \quad f_2 = x_2^{-1/2} U_2;$$

wir bezeichnen mit U_{10}, U_{20} die Wellenfunktionen des ungestörten Zustandes ($F = 0$), mit U_{1s}, U_{2s} die des gestörten Zustands. Bekanntlich gilt für den Grundzustand (vgl. z. B. [4]):

$$U_{10} = x_1^{1/2} e^{-\frac{x_1}{2}}, \quad U_{20} = x_2^{1/2} e^{-\frac{x_2}{2}}.$$

Setzt man ferner $U_{1s} = U_{10} + u_1$, $U_{2s} = U_{20} + u_2$, so erhält man für u eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die man durch Variation der Konstanten lösen kann:

$$u_1 = \varphi_1 \bar{U}_{1s}, \quad u_2 = \varphi_2 \bar{U}_{2s}$$

($\bar{U}_s$ soll eine approximative Lösung der Differentialgleichungen für U_s sein). Man erhält dadurch

$$\varphi_1(x) = \int_{x_0}^x H_1(x) \bar{U}_{1s}^{-2} dx, \quad (4)$$

mit

$$H_1(x) = \lambda \int_0^x \left(x - \frac{\gamma}{x} \right) U_{10}(x) \bar{U}_{1s}(x) dx, \quad (4a)$$

$\lambda = m e F / 4 \hbar^2 (2\sqrt{-A})^3$. Für $\varphi_2(x)$ ist nur λ durch $-\lambda$ zu ersetzen. Die Konstante γ bestimmt sich durch die Quantenbedingung des Problems: $H_1(\infty) = 0$; ferner soll φ_1 im Maximum von U_{10} verschwinden, wodurch x_0 bestimmt wird.

Um Gl. (4) zu lösen, kann man mit sukzessiver Approximation vorgehen: Durch Einsetzen der ungestörten Wellenfunktionen U_{10} , U_{20} an Stelle von $\bar{U}_{1s}$, $\bar{U}_{2s}$ ergeben sich die gestörten Wellenfunktionen in erster Ordnung in der kleinen Größe λ , die bereits von E. GUSTAFSON [5] berechnet wurden:

$$f_{1s} = e^{-\frac{x_1}{2}} \left[1 - \lambda \left(2x_1 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right],$$

$$f_{2s} = e^{-\frac{x_2}{2}} \left[1 + \lambda \left(2x_2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right].$$

Setzt man nun diese in Gl. (4) ein, so erhält man die gestörten Wellenfunktionen zweiter Ordnung in λ :

$$\begin{aligned} f_{1s} = e^{-\frac{x_1}{2}} & \left\{ 1 - \lambda \left(\frac{x_1^2}{2} + 2x_1 - \frac{5}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \left(\frac{x_1^4}{8} + \frac{4x_1^3}{3} + \frac{17x_1^2}{4} + 13x_1 - \frac{449}{24} \right) \right\}, \\ f_{2s} = e^{-\frac{x_2}{2}} & \left\{ 1 + \lambda \left(\frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - \frac{5}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \left(\frac{x_2^4}{8} + \frac{4x_2^3}{3} + \frac{17x_2^2}{4} + 13x_2 - \frac{449}{24} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir führen nun Kugelkoordinaten r , ϑ , φ ein:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{ar}{\hbar c} (1 + \cos \vartheta) \\ x_2 = \frac{ar}{\hbar c} (1 - \cos \vartheta), \end{cases} \quad a = 2\hbar c \sqrt{-A}$$

Dann lautet die gestörte SCHRÖDINGER-Funktion des Grundzustandes:

$$\psi_0 = e^{-ar/\hbar c} \{ 1 - \lambda B + \lambda^2 C \} \quad (5)$$

mit

$$\begin{aligned} B &= \left\{ 2 \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^2 + 4 \frac{ar}{\hbar c} \right\} \cos \vartheta, \\ C &= \left\{ 2 \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^4 + 10 \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^3 + 15 \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^2 \right\} \cos^2 \vartheta - \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^3 + 7 \left(\frac{ar}{\hbar c} \right)^2 + 36 \frac{ar}{\hbar c} - \frac{131}{3}. \end{aligned} \quad (5 a)$$

Der Normierungsfaktor N berechnet sich aus der Bedingung

$$N^2 \int \psi^2 d\tau = 1;$$

die auftretenden Integrale sind vom einfachen Typus

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$$

und es ergibt sich sofort

$$N^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{\hbar c} \right)^3 \left(1 - \frac{326}{3} \lambda^2 \right). \quad (5 b)$$

Für ψ_b sollte die kontinuierliche Wellenfunktion des Elektrons im Feld des Atomkerns und gleichzeitig im elektrischen Feld F verwendet werden. Letzteres kann aus folgendem Grund vernachlässigt werden: es gilt

$$\frac{a}{\hbar c} = \frac{1}{a},$$

wo a der BOHRsche Radius der K -Schale ist. Infolge des Faktors $e^{-r/a}$, der in ψ_a auftritt, werden die maßgebenden Beiträge zum Integral in Gl. (2) von den Funktionswerten $r \leq a$ geliefert; in diesem kleinen Bereich ist aber die kontinuierliche Wellenfunktion ψ_b noch nicht merklich durch das äußere Feld F beeinflusst. Für die Formel der Winkelverteilung der Photoelektronen wird dann allerdings noch eine Korrektur infolge der Krümmung der Elektronenbahnen durch das Feld F anzu-
bringen sein.

Eine weitere Vereinfachung von ψ_b ergibt sich noch aus der Bedingung (3): diese lautet, wenn statt der Ionisationsenergie $I = E_1$ die Größe $\alpha = 2 \hbar c \sqrt{-A}$ eingeführt wird:

$$\frac{\alpha^2}{2\mu} \ll k;$$

infolge der EINSTEINSchen Gleichung des Photoeffekts

$$\frac{p^2}{2\mu} = k - I$$

erhält man dadurch

$$\frac{p^2}{2\mu} \gg I \quad \text{oder} \quad p^2 \gg a^2, \quad (6)$$

was die Gültigkeitsbedingung der BORNschen Approximation darstellt; dieser zufolge kann also für ψ_b einfach die ebene Welle

$$\psi_b = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar c} \quad (7)$$

eingesetzt werden; p_e wird dann eine numerische Größe.

Bezeichnen wir schließlich noch

$$B' = -\frac{e}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{k}}, \quad \mathbf{p} - \mathbf{k} = \mathbf{q}, \quad \delta = \angle(\mathbf{q}, \mathbf{r}),$$

so erhalten wir für das Übergangsmatrixelement

$$H' = B' N p_e \int e^{-r(\alpha - i q \cos \delta)/\hbar c} (1 - \lambda B + \lambda^2 C) d\tau. \quad (8)$$

Der Vektor $\mathbf{q}$ schließe mit der z -Achse, zu der das Feld F parallel liegt, den Winkel ϑ_0 ein. Um daher das Integral Gl. (8) auswerten zu können, drehen wir die z -Achse in die Richtung von $\mathbf{q}$ durch die Transformation der Integrationsvariablen

$$x = x' \cos \vartheta_0 + z' \sin \vartheta_0,$$

$$y = y',$$

$$z = -x' \sin \vartheta_0 + z' \cos \vartheta_0;$$

die Funktionaldeterminante ist 1 und daher $d\tau = d\tau'$; weiters bewirkt die Transformation:

$$\delta = \vartheta', \quad r = r'$$

und nach dem sphärischen Kosinussatz

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta' \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta' \sin \vartheta_0 \cos \varphi'.$$

Das Integral in Gl. (8) ist über den gesamten Raum zu erstrecken, die Grenzen sind daher $0 \leq \vartheta' \leq \pi$, $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, $0 \leq r' \leq \infty$.

Da der Beitrag der Terme proportional $\cos \varphi'$ verschwindet, lautet unser Integral nun

$$H' = B' N p_e \int e^{-r(\alpha - i q \cos \vartheta)/\hbar c} [1 - \lambda B + \lambda^2 (C_1 + C_2)] r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} B &= \left\{ 2 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^2 + 4 \frac{\alpha r}{\hbar c} \right\} \cos \vartheta_0 \cos \vartheta, \\ C_1 &= \left\{ 2 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^4 + 10 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^3 + 15 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^2 \right\} (\cos^2 \vartheta_0 - \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi) \cos^2 \vartheta + \\ &\quad + \left\{ 2 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^4 + 10 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^3 + 15 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^2 \right\} \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi, \\ C_2 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^3 + 7 \left(\frac{\alpha r}{\hbar c} \right)^2 + 36 \frac{\alpha r}{\hbar c} - \frac{131}{3}. \end{aligned} \quad (9a)$$

Die ϑ -Integrale sind folgendermaßen ausführbar:

$$\int_0^\pi e^{ia \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 e^{iaw} dw = \frac{2}{a} \Im e^{ia}.$$

Wegen der Bedingung (6) und wegen der aus der Definition von q folgenden Beziehung

$$q^2 = p^2 + k^2 - 2pk$$

wollen wir in der Endformel, die durch Integration von Gl. (9) entsteht, alle jene Glieder vernachlässigen, die a/q in einer höheren als der ersten Potenz enthalten. Eine nähere Betrachtung, die hier nicht im einzelnen durchgeführt werden soll, zeigt, daß dann in der eckigen Klammer von Gl. (9) nur die Terme 1 und

$$\lambda^2 \left(36 \frac{a}{\hbar c} - \frac{131}{3} \right)$$

beizubehalten sind, was die Rechnung sehr vereinfacht. Wir erhalten so

$$H' = -\frac{e}{\mu} \hat{p}_e \left[\sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 c^2}{k}} \sqrt{\frac{a^3}{\pi \hbar^3 c^3}} \frac{8\pi \hbar^3 c^3 a}{(a^2 + q^2)^2} \left(1 - \frac{239}{3} \lambda^2 \right) \right] \sqrt{1 - \frac{326}{3} \lambda^2}. \quad (10)$$

Durch Einführung von $r_0 = e^2/\mu$, $137 = \hbar c/e^2$ erhalten wir aus Gl. (1) schließlich den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi = \frac{32 \cdot 137 r_0^2 \mu \hat{p} \hat{p}_e^2 a^5}{(a^2 + q^2)^4 k} d\Omega (1 - 268 \lambda^2). \quad (11)$$

Die Größe a soll durch die atomaren Konstanten ausgedrückt werden. Dabei ist aber in Betracht zu ziehen, daß sich das Grundniveau, das als Parameter in a eingeht, mit F in zweiter Ordnung ändert. Die Rechnungen der Störungstheorie [6] geben für diese STARK-Effekt-Verschiebung des Grundzustandes die folgende Formel:

$$E_1 = E_{10} \left(1 + F^2 \cdot \frac{9}{2} \frac{\hbar^8}{m^4 e^{10} Z^6} \right) \quad \text{mit} \quad E_{10} = -\frac{m Z^2 e^4}{2 \hbar^2}.$$

Auch unsere Größe λ enthält E_1 ; doch da in dieser Arbeit nur Effekte zweiter Ordnung berücksichtigt werden sollen und λ schon den Faktor F enthält, kann hier dieser Effekt vernachlässigt werden, und für λ kann demgemäß der Ausdruck

$$\lambda = \frac{m e F}{4 \hbar^2} \frac{1}{(2 \sqrt{-A})^3}, \quad A = \frac{m}{2 \hbar^2} E_{10}$$

Verwendung finden. Daher ist λ proportional F , und wir drücken die Verschiebung des Grundterms zweckmäßig in folgender Form aus:

$$E_1 = -\frac{m Z^2 e^4}{2 \hbar^2} (1 + 72 \lambda^2).$$

Dies in $a = 2 \hbar c \sqrt{-A}$ eingesetzt, ergibt

$$\alpha = \frac{Z\mu}{137} (1 + 36 \lambda^2).$$

Ferner bezeichnen wir zur Untersuchung der Winkelverteilung der Photoelektronen:

Θ = Winkel zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{k}$,

Φ = Winkel zwischen $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ -Ebene und $\mathbf{e}-\mathbf{k}$ -Ebene.

Dadurch erhalten wir

$$p_e = p \sin \Theta \cos \Phi,$$

$$q^2 = 2 k \mu (1 - \beta \cos \Theta), \quad \beta = \frac{\dot{p}}{\mu} = \frac{v}{c},$$

wobei

$$k \approx \frac{p^2}{2\mu}, \quad p^2 \gg \alpha^2$$

benutzt wurde. Die so auftretende Winkelverteilung

$$d\Phi = r_0^2 \frac{Z^5}{137^4} \left(\frac{\mu}{k}\right)^{1/2} \frac{4 \sqrt{2} \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} d\Omega [1 - 88 \lambda^2] \quad (12)$$

ist aber noch zu korrigieren, da das Feld F die Elektronenbahnen ablenkt, wie ja schon erwähnt. Die Korrektur kann auf klassischem Wege erfolgen und soll im folgenden für einen einfachen Fall durchgeführt werden.

Um das betreffende Atom werde ein zylindrischer Schirm mit dem Radius d gelegt, dessen Achse zu F parallel sei. Wir betrachten den Fall, daß $\mathbf{k}$ und $\mathbf{p}$ zu F senkrecht stehen sollen, untersuchen also den Photoeffekt im transversalen Feld, und zwar speziell die Winkelverteilung in einer zu F senkrechten Ebene. Im Fall $F = 0$ ($\lambda = 0$) geht diese Ebene selbstverständlich durch das Atom hindurch. Bei Anlegen des Feldes F erscheint sie aber, da F die Elektronenbahnen in der z -Richtung parabelförmig krümmt, auf dem Schirm um das Stück h in der Feldrichtung verschoben. h läßt sich nun sehr einfach berechnen, indem man für die Elektronenbahn ansetzt

$$z^2 = a x^2 + b x + c$$

und beachtet, daß bei unseren Annahmen am Ort des Atoms $x = 0$:

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0;$$

die Austrittsgeschwindigkeit des Elektrons aus dem Atom v bleibt in der x -Richtung konstant; ferner ist die Beschleunigung des Elektrons im elektrischen Feld

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m} F.$$

und daraus folgt

$$h = \frac{e F}{2 m} \left(\frac{d}{v} \right)^2. \quad (13)$$

Zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts ist Gl. (12) über $d\Omega$ zu integrieren. Hier braucht die Ablenkung der Elektronen durch F nicht berücksichtigt zu werden, da ja bei der Integration nur die Raumwinkelemente wesentlich sind, in welche die Elektronen ursprünglich emittiert werden. Wir vernachlässigen dabei noch $\beta \cos \Theta$ im Nenner, multiplizieren mit 2 (da die K -Schale zwei Elektronen enthält) und erhalten somit für den totalen Wirkungsquerschnitt des Photoeffekts der K -Schale im homogenen elektrischen Feld F :

$$\Phi = \frac{8 \pi r_0^2}{3} \frac{Z^5}{137^4} 4 \sqrt{2} \left(\frac{\mu}{k} \right)^{7/2} [1 - 88 \lambda^2]. \quad (14)$$

Durch Vergleich mit [2] sieht man, daß das Feld den Wirkungsquerschnitt mit dem in der eckigen Klammer stehenden Faktor, der also von zweiter Ordnung in F ist, multipliziert.

λ erhält für die höchsten bisher erreichten Feldstärken $F = 1,4$ Mill. V/cm (nach R. GEBAUER¹) den Wert

$$\lambda = 0,07 \cdot 10^{-3} / Z^3.$$

Daß die nach der BORNSchen Approximation berechnete Formel (14) ihre Gültigkeit selbst bei so extrem hohen Feldstärken nicht verliert, läßt sich folgendermaßen abschätzen: Voraussetzung für die Vernachlässigung einer Änderung der kontinuierlichen Wellenfunktion durch das äußere Feld F war, daß diese innerhalb des Bereichs $0 \leq r \leq a$ nicht merklich vom Feld beeinflußt werden sollte. Da infolge der BORNSchen Approximation dann eine ebene, geradlinig sich fortpflanzende Welle verwendet werden konnte, wird unsere Voraussetzung dann erfüllt sein, wenn die Elektronenbahn zwischen Kern und erstem BOHRschen Radius noch nicht stark von einer Geraden abweicht. Die maximale Ablenkung erfolgt bei Emission des Elektrons senkrecht zum Feld, also muß nach Formel (13) gelten:

$$h_a = \frac{e F}{2 m} \left(\frac{a}{v} \right)^2 \ll a;$$

diese Bedingung ist aber für die durch Gl. (3) eingeschränkten Werte von v stets erfüllt, wie man sich durch Einsetzen der numerischen Werte leicht überzeugt.

Es ist also zu sehen, daß sich der Wirkungsquerschnitt durch Anlegen eines äußeren Feldes zwar ändert, aber infolge des kleinen Wertes von λ nur in sehr geringem Maße. Somit wird es schwierig sein, diesen Effekt experimentell nachzuweisen.

¹ Nach einem Ende Juni 1952 im II. Physikalischen Institut der Universität Wien gehaltenen Vortrag.

Zum Abschluß soll noch eine Bemerkung zu dem Fall gemacht werden, daß statt des elektrischen ein magnetisches Feld angelegt wird. Nach [1], S. 105 ändern sich in diesem Fall die Wellenfunktionen des gebundenen Elektrons jedoch nicht, so daß am totalen Wirkungsquerschnitt überhaupt keine Veränderung entsteht und an der Winkelverteilung eine solche nur dadurch, daß das Magnetfeld die emittierten Elektronen nachträglich von der geradlinigen Bahn ablenkt. Ein derartiger Effekt wurde in den letzten Jahren von amerikanischen Astronomen entdeckt, als sie Beobachtungen mit Photozellen durchführten. Sie stellten fest, daß die Empfindlichkeit (sensitivity) ihrer Photozellen sich änderte, je nachdem welche Lage die Zelle zum erdmagnetischen Feld einnahm („positional effect“ [7]). Der Versuch wurde dann auch mit einem Magneten durchgeführt; obgleich dieser nur schwach war, ergab sich ein verhältnismäßig großes Resultat. Unsere Bemerkungen bestätigen also die von KRON und WHITFORD nahegelegte Annahme, daß hier das Feld die Bahn der emittierten Elektronen ändert.

Ich möchte nicht versäumen, Herrn Doz. Dr. H. ROBL für die Problemstellung und für Diskussionen meinen Dank auszusprechen. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. E. HLAWKA vom mathematischen Institut, der mir in liebenswürdiger Weise eine Integraltafel leihweise zur Verfügung gestellt hat.

Literatur.

- [1] A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn, 1939; 2. Band.
- [2] W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Oxford: Clarendon Press, 2. ed., S. 119—122.
- [3] T. GUSTAFSON, Z. Physik **106**, 709 (1937).
- [4] H. A. BAUER, Grundlagen der Atomphysik, Wien: Springer-Verlag, 4. Aufl., 1951; S. 421, Gl. (58).
- [5] E. GUSTAFSON, Z. Physik **112**, 453 (1939).
- [6] G. WENTZEL, Z. Physik **38**, 512 (1926). — C. LANCZOS, Z. Physik **65**, 431 (1930). — I. WALLER, Z. Physik, **38**, 635 (1926).
- [7] O. J. EGGEN, Astroph. Journ. **114**, Nr. 1 (1951).

Zur Erzeugung von Mesonen beim Durchgang durch Materie.

Von

A. Florian.

Institut für theoretische Physik der Universität Graz.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 20. September 1952.)

Zusammenfassung.

In Ergänzung zu einer früheren Arbeit (PU)¹ wird der Wirkungsquerschnitt von vektoriellen Mesonen berechnet, wobei zu den früher zugrunde gelegten Zwischenzuständen zwei neue hinzugenommen wurden. Dabei wurde das Vorhandensein eines Antiprotons im Zwischenzustand berücksichtigt, auf Grund einer Arbeit von BELINFANTE², welche die bezüglichen Wechselwirkungsterme aufzustellen gestattet. Die Rechnung wurde soweit als möglich ohne zusätzliche Vernachlässigungen durchgeführt. Erst die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes machte eine Teilung in kleine und große Energien des einfallenden Photons notwendig. Im Falle kleiner Energien ergibt sich der totale WQ. zu

$$\Phi \doteq \left(5,8 + 19,7 \frac{m_U}{M}\right) \pi \left(\frac{g e}{m_U c^2}\right)^2 \cdot \frac{v}{c}.$$

Der Fall großer Energien führt zu sehr umständlichen Rechnungen und soll gelegentlich einer späteren Arbeit vorbehalten sein.

§ 1. Hamiltonfunktion und Wechselwirkungsoperatoren.

Die totale HAMILTON-Funktion setzt sich aus folgenden Teilen zusammen:

$$H = H_E + H_U + H_M + H^{e'} + H^e + H^s + H^{ge}, \quad (1)$$

wobei H_E , H_U , H_M die HAMILTON-Funktionen des elektromagnetischen Feldes, des Mesonfeldes und der schweren Partikeln sind. $H^{e'}$ ist die Wechselwirkungsfunktion zwischen schweren Partikeln und Photonen, H^e die der Photonen und Mesonen, H^s die der Mesonen und schweren Partikeln. H^{ge} gibt die direkte Wechselwirkung zwischen Photonen

¹ Acta Physica Austriaca, Bd. I, S. 55.

² BELINFANTE, Thesis 1939, Leyden.

und Mesonen und schweren Partikeln an. Dabei hat man unter schweren Partikeln Protonen, Neutronen und ihre Antipartikeln zu verstehen. $H^{e'}$ bedeutet

$$H^{e'} = -e \vec{A} \sum_P \vec{\psi}^{\rightarrow} \vec{\alpha} \psi. \quad (2)$$

Die übrigen Wechselwirkungsausdrücke sind der bereits zitierten Arbeit¹ zu entnehmen, wobei Terme höherer als erster Ordnung in e oder g unterdrückt wurden, da sie für die im folgenden behandelten Prozesse belanglos sind. Schließlich bedeuten

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \tilde{\Phi} \Psi, & \vec{M} &= \tilde{\Phi} \varrho_1 \vec{\sigma} \Psi \\ \vec{T} &= -\tilde{\Phi} \varrho_2 \vec{\sigma} \Psi, & \vec{S} &= \tilde{\Phi} \varrho_3 \vec{\sigma} \Psi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit Φ , Ψ als Neutron-, bzw. Protonwellenfunktion. Die Feldfunktionen werden nach FOURIER-Reihen mit dem Periodizitätsvolumen 1 entwickelt. Wir setzen an

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{i \sqrt{2\pi} \hbar c \kappa}{\sqrt{E_k}} \sum_{\lambda=1,2} (a_{\vec{k}\lambda} - b_{\vec{k}\lambda}^*) \vec{e}(\vec{k}\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2\pi E_k} (A_{\vec{k}} + B_{\vec{k}}^*) \vec{e}(\vec{k}) \right\} e^{i(\vec{k}|\vec{r})} \\ \vec{U}^+ &= \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{8\pi c \kappa}} \sum_{\lambda=1,2} (a_{\vec{k}\lambda}^* + b_{\vec{k}\lambda}) \vec{e}(\vec{k}\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\hbar}{\sqrt{8\pi E_k}} (A_{\vec{k}}^* - B_{\vec{k}}) \vec{e}(\vec{k}) \right\} e^{-i(\vec{k}|\vec{r})} \end{aligned} \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{e}(\vec{k}) &= \frac{\vec{k}}{k}, & \vec{e}(-\vec{k}) &= -\vec{e}(\vec{k}); & |\vec{e}(\vec{k}\lambda)| &= 1, \\ \vec{e}(-\vec{k}, \lambda) &= \pm \vec{e}(\vec{k}, \lambda), & \vec{k} \cdot \vec{e}(\vec{k}\lambda) &= 0, & \lambda &= 1, 2, \\ E_k &= \hbar c \sqrt{k^2 + \kappa^2}, & \kappa &= \frac{m_U c}{\hbar}. \end{aligned} \quad (5)$$

a^* , b^* , ... sind die Entstehungsoperatoren der Mesonen, a , b , ... bedeuten die Vernichtungsoperatoren, und zwar beziehen sich $a_{\vec{k}\lambda}$, $A_{\vec{k}}$ auf positive Mesonen vom Impuls $\hbar \vec{k}$,

während $b_{\vec{k}\lambda}$, $B_{\vec{k}}$ sich auf negative Mesonen vom Impuls $-\hbar \vec{k}$ beziehen.

Ihre Matricelemente sind nur für Einzelprozesse (Entstehung oder Vernichtung eines Mesons) von Null verschieden und, soweit wir sie benötigen, gleich 1.

$$\vec{A} = \sum_{\vec{l}} \sum_{\mu=1,2} \hbar c \left| \frac{2\pi}{E_c} \left\{ C_{\vec{l}\mu}^* e^{-i(\vec{l}\vec{r})} + C_{\vec{l}\mu} e^{i(\vec{l}\vec{r})} \right\} \right| c(\vec{l}\mu) \quad (6)$$

stellt die entsprechende Entwicklung für das Photonenfeld dar. E_l ist die Energie eines Photons. a, b, A, B, C und ihre Konjugierten genügen den üblichen Vertauschungsrelationen der Bosepartikeln. Die Nucleonwellenfunktionen Φ, Ψ entwickeln wir gleichfalls nach ebenen Wellen,

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(v_{\vec{k},\sigma} u_{\vec{k},\sigma} + w_{-\vec{k},\sigma}^* u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r})} \\ \tilde{\Phi} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(v_{\vec{k},\sigma}^* u_{\vec{k},\sigma}^* + w_{-\vec{k},\sigma} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}*} \right) e^{-i(\vec{k}\vec{r})} \end{aligned} \right\} \text{Neutron} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(v_{\vec{k},\sigma} u_{\vec{k},\sigma} - w_{-\vec{k},\sigma}^* u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r})} \\ \tilde{\Psi} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(v_{\vec{k},\sigma}^* u_{\vec{k},\sigma}^* + w_{-\vec{k},\sigma} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}*} \right) e^{-i(\vec{k}\vec{r})} \end{aligned} \right\} \text{Proton} \quad (8)$$

wobei $u_{\vec{k},\sigma}, u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}}$ vierkomponentige normierte DIRAC-Spinoren sind, die den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \{M c^2 \beta + \hbar c (\vec{k} \vec{\alpha})\} \begin{pmatrix} u_{\vec{k},\sigma} \\ u_{\vec{k},\sigma} \end{pmatrix} &= + c \sqrt{M^2 c^2 + \hbar^2 k^2} \begin{pmatrix} u_{\vec{k},\sigma} \\ u_{\vec{k},\sigma} \end{pmatrix} \\ (\vec{k}, \sigma) \begin{pmatrix} u_{\vec{k},\sigma} \\ u_{\vec{k},\sigma} \end{pmatrix} &= \sigma k \begin{pmatrix} u_{\vec{k},\sigma} \\ u_{\vec{k},\sigma} \end{pmatrix} \quad \sigma = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gehorchen. $u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}}, u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}}$ stellen die ladungskonjugierten Spinoren zu

$u_{-\vec{k},\sigma}, u_{-\vec{k},\sigma}$ dar und erfüllen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \{M c^2 \beta + \hbar c (\vec{k} \vec{\alpha})\} \begin{pmatrix} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \\ u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \end{pmatrix} &= - c \sqrt{M^2 c^2 + \hbar^2 k^2} \begin{pmatrix} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \\ u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \end{pmatrix} \\ (\vec{k}, \sigma) \begin{pmatrix} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \\ u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \end{pmatrix} &= \sigma k \begin{pmatrix} u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \\ u_{-\vec{k},\sigma}^{\mathfrak{L}} \end{pmatrix} \quad \sigma = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$v_{\vec{k},\sigma}, w_{\vec{k},\sigma}, v_{\vec{k},\sigma}, w_{\vec{k},\sigma}$ sind JORDAN-WIGNER-Matrizen und gehorchen den Relationen

$$\begin{aligned} [v_{\vec{k},\sigma}, v_{\vec{k}',\sigma'}^*]_+ &= \delta_{\sigma\sigma'}, \delta_{\vec{k}\vec{k}}, \quad \text{u. s. w.} \\ [v_{\vec{k},\sigma}, w_{\vec{k}',\sigma'}]_+ &= [v_{\vec{k},\sigma}, w_{\vec{k}',\sigma'}^*]_+ = 0 \quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \quad (11)$$

gemäß der FERMI-DIRAC-Statistik. Die Ausdrücke für Energie, Impuls und Ladung der schweren Partikeln

$$\begin{aligned} H_M &= \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \{ (v_{\vec{k}\sigma}^* v_{\vec{k}\sigma} - w_{\vec{k}\sigma} w_{\vec{k}\sigma}^*) + \\ &\quad + (v_{\vec{k}\sigma}^* v_{\vec{k}\sigma} - w_{\vec{k}\sigma} w_{\vec{k}\sigma}^*) \}, \\ \vec{G} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} \hbar \vec{k} \{ (v_{\vec{k}\sigma}^* v_{\vec{k}\sigma} - w_{\vec{k}\sigma} w_{\vec{k}\sigma}^*) + (v_{\vec{k}\sigma}^* v_{\vec{k}\sigma} - w_{\vec{k}\sigma} w_{\vec{k}\sigma}^*) \} \quad (12) \\ e &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} e \{ v_{\vec{k}\sigma}^* v_{\vec{k}\sigma} + w_{\vec{k}\sigma} w_{\vec{k}\sigma}^* \} \end{aligned}$$

führen zusammen mit den VR zur Operatordeutung der Amplituden v, w, v, w :

$$v_{\vec{k},\sigma} \quad \text{Vernichtung eines Neutrons vom Impuls } \hbar \vec{k} \text{ und der Energie} \\ + \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2},$$

$$w_{\vec{k},\sigma} \quad \text{Vernichtung eines Antineutrons vom Impuls } \hbar \vec{k} \text{ und Energie} \\ + \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2},$$

$$v_{\vec{k},\sigma} \quad \text{Vernichtung eines Protons mit Impuls } \hbar \vec{k} \text{ und Energie} \\ + \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2} \quad \text{und Ladung } +e,$$

$$w_{\vec{k},\sigma} \quad \text{Vernichtung eines Antiprotons mit Impuls } \hbar \vec{k} \text{ und Energie} \\ + \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k^2} \quad \text{und Ladung } -e.$$

Die hier in Betracht kommenden Matrixelemente sind sämtlich gleich 1, da wir es nur mit einem Partikel jeder Art zu tun haben. Setzt man diese Entwicklungen in die Ausdrücke für die Wechselwirkungsfunktionen ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
H^e = & -e \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\sigma, \sigma'} \left[\sum_{\vec{l}, \mu} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_l}} \{ C_{\vec{l}\mu}^* \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{l}) + \right. \\
& + C_{\vec{l}\mu} \delta(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{l}) \} \cdot (v_{\vec{k}'\sigma'}^* u_{\vec{k}\sigma}^* + \\
& \left. + w_{-\vec{k}'\sigma'}^* u_{-\vec{k}\sigma}^*) (\vec{\alpha}, \vec{e}(\vec{l}\mu)) (v_{\vec{k}\sigma} u_{\vec{k}\sigma} + w_{-\vec{k}\sigma}^* u_{-\vec{k}\sigma}^*) \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

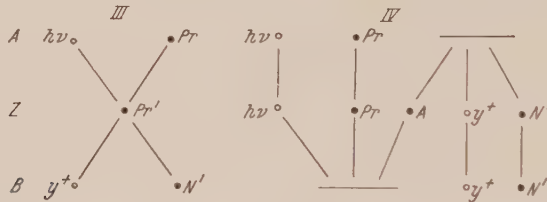
$$\begin{aligned}
H^e = & - \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{e}{2} \left[\sum_{\vec{l}} \sum_{\mu=1,2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_l}} \{ C_{\vec{l}\mu}^* \delta(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{l}) + \right. \\
& + C_{\vec{l}\mu} \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{l}) \} \cdot \left\{ \sum_{\lambda} \frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} (a_{\vec{k}\lambda}^* + b_{\vec{k}\lambda}) (-A_{\vec{k}'} + \right. \\
& + B_{\vec{k}'}^*) \vec{e}(\vec{l}\mu) \vec{e}(\vec{k}\lambda) + \frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} (-A_{\vec{k}}^* + B_{\vec{k}}) (-A_{\vec{k}'} + \\
& + B_{\vec{k}'}^*) \vec{e}(\vec{l}\mu) \vec{e}(\vec{k}) + \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} (-a_{\vec{k}\lambda}^* + b_{\vec{k}\lambda}) \cdot (-a_{\vec{k}'\lambda'} + \\
& + b_{\vec{k}'\lambda'}^*) [\vec{e}(\vec{l}\mu) \vec{e}(\vec{k}\lambda)] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}'\lambda')] + \sum_{\lambda'} i \frac{k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} (A_{\vec{k}}^* + \\
& + B_{\vec{k}}) (a_{\vec{k}'\lambda'} - b_{\vec{k}'\lambda'}^*) \cdot [\vec{e}(\vec{l}\mu) \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}'\lambda')] \left. \right\} + \text{konj. kompl.} \left. \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^g = & \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{j}, \vec{j}'} \sum_{\sigma, \sigma'} (v_{\vec{j}\sigma}^* u_{\vec{j}\sigma}^* + w_{-\vec{j}, \sigma}^* u_{-\vec{j}, \sigma}^*) \times \left\{ -g_1 \hbar c \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} (-A_{\vec{k}}^* + \right. \\
& + B_{\vec{k}}) - i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \sum_{\lambda=1,2} (-a_{\vec{k}\lambda}^* + b_{\vec{k}\lambda}) \varrho_1(\vec{e}(\vec{k}\lambda) \cdot \vec{\sigma}) - \\
& - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} (A_{\vec{k}}^* + B_{\vec{k}}) \varrho_1(\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma}) - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} \cdot \sum_{\lambda=1,2} (a_{\vec{k}\lambda}^* + \\
& + b_{\vec{k}\lambda}) \varrho_2(\vec{e}(\vec{k}\lambda) \cdot \vec{\sigma}) - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} (A_{\vec{k}}^* - B_{\vec{k}}) \varrho_2(\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma}) + \\
& + g_2 \hbar c \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \cdot \sum_{\lambda=1,2} (-a_{\vec{k}\lambda}^* + b_{\vec{k}\lambda}) \varrho_3 \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}\lambda)] \vec{\sigma} \left. \right\} \times \\
& \times (v_{\vec{j}'\sigma'} u_{\vec{j}'\sigma'} + w_{-\vec{j}', \sigma'}^* u_{-\vec{j}', \sigma'}^*) \delta(\vec{j} - \vec{j}' + \vec{k}) + \text{konj. kompl.} \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{\text{ge}} = & \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{l}} \sum_{\mu=1,2} \sum_{\vec{j}, \sigma} \sum_{\vec{j}', \sigma'} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{E_l}} e \hbar c \{ C_{\vec{l}\mu}^* \delta(\vec{k} + \vec{j} - \vec{j}' - \vec{l}) + \right. \\
& C_{\vec{l}\mu} \delta(\vec{k} + \vec{j} - \vec{j}' - \vec{l}) \} \cdot (v_{\vec{j}\sigma}^* u_{\vec{j}\sigma}^* \cdot w_{-\vec{j}, \sigma - \vec{j}, \sigma} u_{\vec{j}\sigma}^*) \cdot \left\{ g_1 \left\{ \sum_{\lambda=1,2} i \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa^2 c \hbar} (a_{\vec{k}\lambda}^* + \right. \right. \\
& + b_{\vec{k}\lambda}) e(\vec{l}\mu) \cdot e(\vec{k}\lambda) + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} (-A_{\vec{k}}^* + B_{\vec{k}}) e(\vec{l}\mu) \cdot e(\vec{k}) \} + \\
& + g_2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} (a_{\vec{k}\lambda}^* - b_{\vec{k}\lambda}) \varrho_3 [e(\vec{l}\mu) \cdot e(\vec{k}\lambda)] \vec{\sigma} + i \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa^2 c \hbar} (A_{\vec{k}}^* + \right. \\
& + B_{\vec{k}}) \varrho_3 [e(\vec{l}\mu) \cdot e(\vec{k})] \vec{\sigma} \} \left. \right\} (v_{\vec{j}'\sigma'} u_{\vec{j}'\sigma'} + w_{-\vec{j}'\sigma'}^* u_{-\vec{j}'\sigma'}^*) \left. \right] + \text{konj. kompl.} \quad (16)
\end{aligned}$$

§ 2. Problemstellung.

Wir wollen nun in Ergänzung zur früheren Arbeit (1. c.) zwei weitere Prozesse berücksichtigen.



Anmerkung; γ^+ in der Abbildung bedeutet Y^+ im Text.

Abb. 1.

III bedeutet, daß das Proton unter Aufnahme des Photons in ein Zwischenproton übergeht, welches sich in ein positives Meson und ein Neutron spaltet. IV berücksichtigt die spontane Entstehung eines Antiprotons, positiven Mesons und eines Neutrons. Dabei tritt die Vernichtung eines Protons, Photons und des Antiprotons ein. Impuls, Energie und Spin der Partikeln sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Teilchen:	Pr	N'	Y^+	Y^-	Y^{++}	Pr'	A	$h\nu$
Impuls	0	$\vec{k}'$	$\vec{k}$	$\vec{k}'$	$\vec{k}''$	$\vec{k}_0$	$-\vec{k}_0$	$\vec{k}_0$
Energie	$M c^2$	$W_{k'}$	E_k	$E_{k'}$	$E_{k''}$	W'''	W''''	E_0
Spin	σ	σ'				σ''	σ'''	
Polarisation:			λ	λ'	λ''			λ_0
Impuls- und Energiesatz lauten								

$$\begin{aligned}
\vec{k}_0 &= \vec{k} + \vec{k}', & \vec{k}'' &= -\vec{k}' & (E_{k'} &= E_{k''}) \\
E_0 + M c^2 &= E_k + W_{k'} & & & &
\end{aligned} \quad (17)$$

Aus dem Impulsdreieck (l. c. 1, Abb. 2), das auch die Polarisationsrichtungen des Photons und der Mesonen enthält, entnimmt man die Relationen:

$$\begin{aligned} k_0 &= k \cos \Theta + k' \cos \chi, & k \sin \Theta &= k' \sin \chi, & k_0 \sin \Theta &= k' \sin(\Theta + \chi) \\ k'^2 &= k^2 + k_0^2 - 2 k k_0 \cos \Theta \end{aligned} \quad (18)$$

§ 3. Matricelemente.

Aus den vorhin aufgestellten Wechselwirkungsoperatoren entnimmt man die für die Störungsrechnung erforderlichen Matricelemente, die wir in der DIRACschen Bezeichnungsweise angeben wollen.

Direkter Prozeß

$$\begin{aligned} & (1 P r, 1 h v | H_{AB}^{ge} | 1 N' 1 Y^+ (\vec{k})) = \\ &= u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ -g_1 e \frac{2\pi \hbar c}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k}) + \right. \\ & \quad \left. + i g_2 e \frac{2\pi}{\kappa^2} \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} \varrho_3 [e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k})] \sigma \right\} u_{0\sigma} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & (1 P r 1 h v | H_{AB}^{ge} | 1 N' 1 Y^+ (\vec{k} \lambda)) = \\ &= u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ i g_1 e \frac{2\pi}{\kappa^2} \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) + \right. \\ & \quad \left. + g_2 e \frac{2\pi \hbar c}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} \varrho_3 [e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \sigma \right\} u_{0\sigma} \end{aligned}$$

Prozeß I und II:

$$\begin{aligned} & (1 h v | H_{AZ}^e | 1 Y^+ (\vec{k}), 1 Y^- (\vec{k}')) = \\ &= -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ -\frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k'}}} e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k}') \right\} \\ & (1 h v | H_{AZ}^e | 1 Y^+ (\vec{k}), 1 Y^- (\vec{k}' \lambda')) = \\ &= -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(-\vec{k}', \lambda') \right. \\ & \quad \left. + \frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} [e^{\vec{k}_0 \lambda_0} \cdot \vec{e}(\vec{k})] [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(-\vec{k}', \lambda')] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& (1 \hbar \nu | H_{AZ}^e | 1 Y^+ (\vec{k} \lambda), 1 Y^- (\vec{k}')) = \\
& = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ \frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) \right. \\
& \quad \left. + \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} [e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \right\} \\
& (1 \hbar \nu | H_{AZ}^e | 1 Y^+ (\vec{k} \lambda), 1 Y^- (\vec{k}' \lambda')) \\
& = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ \frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} [e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(-\vec{k}' \lambda')] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k'}}} [e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(-\vec{k}', \lambda')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \right\} \\
& (1 P r, 1 Y^- (\vec{k}') | H_{ZB}^g | 1 N') = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ -g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} + \right. \\
& \quad \left. + g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{0\sigma} \\
& (1 P r, 1 Y^- (\vec{k}' \lambda') | H_{ZB}^g | 1 N') = \\
& = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ -i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \varrho_1 \vec{e}(-\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(-\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& \quad \left. - g_2 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(-\vec{k}' \lambda')] \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{0\sigma} \\
& (1 P r | H_{AZ}^g | 1 N', 1 Y^{++} (\vec{k}'')) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \hbar c \frac{k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} - \right. \\
& \quad \left. - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{0\sigma} \\
& (1 P r | H_{AZ}^g | 1 N', 1 Y^{++} (\vec{k}'' \lambda'')) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& \quad \left. - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{0\sigma} \\
& (1 \hbar \nu, 1 Y^{++} (\vec{k}'') | H_{ZB}^e | 1 Y^+ (\vec{k})) = \quad (21) \\
& = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ \frac{\hbar c k''}{\sqrt{E_k E_{k''}}} e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k''}}} e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'') \right\} \\
& (1 \hbar \nu, 1 Y^{++} (\vec{k}'' \lambda'') | H_{ZB}^e | 1 Y^+ (\vec{k})) = \\
& = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ i \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k''}}{E_k}} e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda'') + \right. \\
& \quad \left. + i \frac{k''}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k''}}} [e(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda'')] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 \hbar \nu, 1 Y^{+''}(\vec{k}'') | H_{ZB}^e | 1 Y^+(\vec{k} \lambda)) = \\
 & = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \left\{ -i \frac{k''}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k''}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) - \right. \\
 & \quad \left. - i \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k''}}{E_k}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 \hbar \nu, 1 Y^{+''}(\vec{k}'' \lambda'') | H_{ZB}^e | 1 Y^+(\vec{k} \lambda)) = \\
 & = -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \times \left\{ \frac{\hbar c k''}{\sqrt{E_k E_{k''}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k''}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \right\}
 \end{aligned}$$

Prozesse III und IV:

$$\begin{aligned}
 & (1 P r(0), 1 \hbar \nu | H_{AZ}^{e'} | 1 P r'(\vec{k}_0)) = -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} u_{\vec{k}_0 \sigma''}^* (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \\
 & (1 P r'(\vec{k}_0) | H_{ZB}^g | 1 N', 1 Y^+(\vec{k})) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} - \right. \\
 & \quad \left. - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''} \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 P r'(\vec{k}_0) | H_{ZB}^g | 1 N', 1 Y^+(\vec{k} \lambda)) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
 & \quad \left. - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''} \\
 & (O | H_{AZ}^g | 1 A, 1 N', 1 Y^+(\vec{k})) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} - \right. \\
 & \quad \left. - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''}^{\mathfrak{L}} \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (O | H_{AZ}^g | 1 A, 1 N', 1 Y^+(\vec{k} \lambda)) = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
 & \quad \left. - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''}^{\mathfrak{L}} \\
 & (1 P r, 1 A, 1 \hbar \nu | H_{ZB}^{e'} | O) = -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} u_{\vec{k}_0 \sigma'''}^{\mathfrak{L}*} (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma}
 \end{aligned}$$

§ 4. Störungsrechnung.

Für die Entstehung von longitudinalen und transversalen Mesonen gilt nun entsprechend den mit I bis IV bezeichneten Prozessen

$$H_{AB} = H_{AB}^{ge} + H_{AB}^I + H_{AB}^{II} + H_{AB}^{III} + H_{AB}^{IV}.$$

Prozesse I und II:

$$H_{AB}^I = \sum \frac{H_{AB}^{ge} H_{AB}^{ge}}{\Delta_I E} \quad H_{AB}^{II} = \sum \frac{H_{AB}^{ge} H_{AB}^{ge}}{\Delta_{II} E} \quad \Delta_I E = E_A - E_Z.$$

In beiden Fällen ist über die Polarisierung des Mesons im Zwischenzustand zu summieren.

Danach ist

$$\Delta_I E = E_0 - (E_k + E_{k'}), \quad \Delta_{II} E = E_k - (E_0 + E_{k'}), \quad (24)$$

wobei vom Energiesatz Gebrauch gemacht wurde. Damit ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} H_{AB}^{I \text{ long}} = & -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \cdot \frac{1}{\Delta_I E} \times \left[u_{k' \sigma'}^* \left\{ -g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} + \right. \right. \\ & + g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} u_{0 \sigma} \cdot \left\{ - \right. \\ & - \frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}') \left. \right\} + \sum_{\lambda'=1,2} u_{k' \sigma'}^* \left\{ - \right. \\ & - i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} - \\ & - g_2 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} u_{0 \sigma} \times \\ & \times \left\{ \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda') + \frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} \right. \\ & \left. \cdot [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \right\} \left. \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{AB}^{I \text{ trans}} = & -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \cdot \frac{1}{\Delta_I E} \times \left[u_{k' \sigma'}^* \left\{ -g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} + \right. \right. \\ & + g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} \cdot u_{0 \sigma} \cdot \left\{ \frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \right. \\ & \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) + \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \left. \right\} + \sum_{\lambda'=1,2} u_{k' \sigma'}^* \left\{ - \right. \\ & - i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k'}}}{\kappa} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} - \\ & - g_2 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k'}}} \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} u_{0 \sigma} \times \left\{ \frac{\hbar c k'}{\sqrt{E_k E_{k'}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot \right. \\ & \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k'}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \left. \right\} \left. \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{II\text{ long}} = & -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{II} E} \times \left[u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \right. \right. \\
& - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} \Big\} u_{0\sigma} \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{\hbar c k''}{\sqrt{E_k E_{k''}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k''}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'') \right\} + \\
& + \sum_{\lambda''=1,2} u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& - g_2 \frac{\hbar c k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \Big\} u_{0\sigma} \cdot \left\{ \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k''}}{E_k}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \right. \\
& \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') + \frac{i k''}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k''}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] + [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \Big\} \Big] \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{II\text{ trans}} = & -\frac{e}{2} \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{II} E} \times \left[u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \right. \right. \\
& - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{\sigma} \Big\} u_{0\sigma} \cdot \\
& \cdot \left\{ -\frac{i k''}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k''}}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) - \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{E_{k''}}{E_k}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'')] \cdot \right. \\
& \cdot \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) \Big\} - \sum_{\lambda''=1,2} u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_{k''}}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'') \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k''}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_{k''}}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \\
& \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \Big\} u_{0\sigma} \cdot \left\{ \frac{\hbar c k''}{\sqrt{E_k E_{k''}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot [\vec{e}(\vec{k}'') \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] + \right. \\
& + \frac{\hbar c k}{\sqrt{E_k E_{k''}}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}'' \lambda'')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \Big\} \Big] \quad (28)
\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen, so finden wir schließlich

$$\begin{aligned}
(H_{AB}^I + H_{AB}^{II})^{\text{long}} = & \frac{2\pi e \hbar^2 c^2}{\sqrt{E_0 E_k}} \frac{\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{k^2 + k'^2}{k'} \times \\
\times u_{\vec{k}'\sigma'}^* & \left[-g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} + \frac{g_1}{\kappa} (E_0 - E_k) \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \right] u_{0\sigma} + \\
& + \frac{2\pi i e \hbar c}{\kappa} \frac{1}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \sum_{\lambda'=1,2} u_{\vec{k}'\sigma'}^* \left[\frac{\hbar}{\sqrt{E_0 E_k}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda') + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ i g_1 \hbar c (E_0 - E_k) \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} + \frac{g_2}{\kappa} E_{k'}^2 \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} + \right. \\
& + \frac{g_2}{\kappa} \hbar c k' (E_0 - E_k) \varrho_3 \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \vec{\sigma} \left. \right\} + k' \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \\
& \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \cdot \left\{ i g_1 \hbar c \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} + \right. \\
& + \frac{g_2}{\kappa} (E_0 - E_k) \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} + g_2 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \vec{\sigma} \left. \right\} \Big] u_{0\sigma} \quad (29)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(H_{AB}^I + H_{AB}^{II})^{trans.} &= \frac{2\pi e \hbar c}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} u_{k'\sigma'}^* \left[\frac{i k'}{\kappa} \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) \times \right. \\
&\times \left\{ g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} + \frac{g_1}{\kappa} (E_k - E_0) \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} + i g_2 \hbar c \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \right\} + \\
&+ \frac{i k}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{E_0 E_k}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot \left\{ g_1 \frac{\hbar c k'}{\kappa} (E_0 - E_k) - \right. \\
&- \frac{g_1}{\kappa} E_{k'}^2 \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} + i g_2 \hbar c (E_0 - E_k) \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} + \\
&+ \sum_{\lambda'=1,2} \sqrt{\frac{\hbar c}{E_0 E_k}} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] \cdot [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - 2 [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \\
&\cdot \vec{k}] [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \} \times \left\{ i g_1 \hbar c \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \vec{\sigma} + \frac{g_2}{\kappa} (E_0 - E_k) \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \cdot \right. \\
&\cdot \vec{\sigma} + g_2 \frac{\hbar c k'}{\kappa} \varrho_3 \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \vec{\sigma} \left. \right\} \Big] u_{0\sigma} \quad (30)
\end{aligned}$$

Fügen wir noch die direkte Wechselwirkung hinzu, so nimmt $H_{AB}^{ge} + H_{AB}^I + H_{AB}^{II}$ die Form an:

$$\begin{aligned}
(H_{AB}^{ge} + H_{AB}^I + H_{AB}^{II})^{long.} &= u_{k'\sigma'}^* \{ A + \vec{B} \varrho_1 \vec{\sigma} + \vec{C} \varrho_2 \vec{\sigma} + \vec{D} \varrho_3 \vec{\sigma} \} u_{0\sigma} \\
(H_{AB}^{ge} + H_{AB}^I + H_{AB}^{II})^{trans.} &= u_{k'\sigma'}^* \{ E + \vec{F} \varrho_1 \vec{\sigma} + \vec{G} \varrho_2 \vec{\sigma} + \vec{H} \varrho_3 \vec{\sigma} \} u_{0\sigma} \quad (31)
\end{aligned}$$

mit folgender Bedeutung der neu eingeführten Größen $A, \vec{B}, \dots$:

$$A = - \frac{2\pi g_1 e \hbar c}{\kappa \sqrt{E_0 E_k}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) \cdot \left\{ 1 + \frac{\hbar^2 c^2 (k^2 + k'^2)}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \right\} \quad (32 a)$$

$$\vec{B} = \frac{2\pi g_1 e \hbar^2 c^2}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} \left[\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) \frac{k^2 + k'^2}{k'} (E_0 - E_k) \vec{e}(\vec{k}') - \right. \\ \left. - \sum_{\lambda'} \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda') k (E_0 - E_k) + [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot \right. \\ \left. \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] k' E_k \} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \right] \quad (32 b)$$

$$\vec{C} = \frac{2\pi i g_2 e \hbar c}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} \left[- \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) \frac{\hbar^2 c^2 (k^2 + k'^2)}{k'} \vec{e}(\vec{k}') - \right. \\ \left. + \sum_{\lambda'} \frac{1}{\kappa^2} \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda') k E_{k'}^2 + [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot \right. \\ \left. \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] k' (E_0 - E_k) E_k \} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \right] \quad (32 c)$$

$$\vec{D} = \frac{2\pi i g_2 c}{\kappa^2} \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})]$$

$$+ \frac{2\pi i g_2 e \hbar^2 c^2}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{k'}{\sqrt{E_0 E_k}} \sum_{\lambda'} \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda') k (E_0 - E_k) + \\ - [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] k' E_k \} \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \quad (32 d)$$

$$E = \frac{2\pi i g_1 c}{\kappa^2} \sqrt{\frac{E_k}{E_0}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) + \frac{2\pi i g_1 e \hbar^2 c^2}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{k'}{\sqrt{E_0 E_k}} \times \\ \times \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) k' E_k + [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] k (E_0 - E_k) \} \quad (32 e)$$

$$\vec{F} = \frac{2\pi i g_1 e \hbar c}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} \left[\frac{1}{\kappa^2} \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) k' E_k (E_k - E_0) - \right. \\ \left. - [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] k E_{k'}^2 \} \vec{e}(\vec{k}') + \hbar^2 c^2 \sum_{\lambda'} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] \cdot \right. \\ \left. \cdot [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - 2 (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \} \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \right] \quad (32 f)$$

$$\vec{G} = \frac{2\pi g_2 e \hbar^2 c^2}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 E_k}} \left[- \{ \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) k' E_k \cdot \right.$$

$$\left. + [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] k (E_0 - E_k) \} \vec{e}(\vec{k}') + \sum_{\lambda'} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] \cdot \right. \\ \left. [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - 2 (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \} \cdot (E_0 - E_k) \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \right] \quad (32 g)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \frac{2\pi g_2 e \hbar c}{\kappa \sqrt{E_0 E_k}} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] + \\ & + \frac{2\pi g_2 e \hbar^2 c^2}{(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2} \frac{\hbar c k'}{\kappa \sqrt{E_0 E_k}} \sum_{\lambda'} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] \cdot [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - \\ & - 2(\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k})(\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \} [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')]; \quad (32h) \end{aligned}$$

Prozesse III und IV:

$$H_{AB}^{III} = \sum \frac{H_{ZB}^g H_{AZ}^{e'}}{\Delta_{III} E}, \quad H_{AB}^{IV} = \sum \frac{H_{ZB}^{e'} H_{AZ}^g}{\Delta_{IV} E}$$

Zu summieren ist über die Spineinstellungen des Protons (III), bzw. des Antiprotons (IV) im Zwischenzustand. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{III} E &= M c^2 + E_0 - W'' & \Delta_{IV} E &= -(E_0 + M c^2 + W'') \\ W'' &= + \sqrt{\hbar^2 c^2 k_0^2 + M^2 c^4}, \quad (33) \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe des Energiesatzes findet; nun folgen die Formeln:

$$\begin{aligned} H_{AB}^{III \text{ long}} &= -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{III} E} \sum_{\sigma''} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} - \right. \\ & - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''} \cdot u_{\vec{k}_0 \sigma''}^* (\vec{a} \cdot \\ & \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \\ H_{AB}^{III \text{ trans}} &= -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{III} E} \sum_{\sigma''} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\ & - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \\ & \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \left. \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma''} \cdot u_{\vec{k}_0 \sigma''}^* \cdot (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \quad (34) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_{AB}^{IV \text{ long}} &= -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{IV} E} \sum_{\sigma'''} u_{\vec{k}_0 \sigma'''}^* (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \times \\ & \times u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\ & - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} u_{\vec{k}_0 \sigma'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{IV \text{ trans}} = & -e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{IV} E} \sum_{\sigma'''} u_{-\vec{k}_0, \sigma'''}^* (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) \mu_{0\sigma} \times \\
& \times u_{\vec{k}', \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& \left. - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \right\} u_{-\vec{k}_0, \sigma'''}^* \quad (35)
\end{aligned}$$

Um die angedeuteten Summationen durchführen zu können, führen wir die ladungskonjugierten Spinoren ein:

$$\left. \begin{aligned}
\left\{ M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a} \right\} u_{\vec{k}_0, \sigma''} &= + W'' u_{\vec{k}_0, \sigma''} \\
\left\{ M c^2 \beta - \hbar c \vec{k}_0 \vec{a} \right\} u_{-\vec{k}_0, \sigma''}^* &= - W'' u_{-\vec{k}_0, \sigma''}^*
\end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Daher

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right\} u_{\vec{k}_0, \sigma''} &= u_{\vec{k}_0, \sigma''} \\
\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right\} u_{-\vec{k}_0, \sigma''}^* &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Der Vernichtungsoperator auf der linken Seite gestattet es, die Matrixelemente für den dritten Prozeß folgendermaßen zu schreiben:

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{III \text{ long}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{III} E} \cdot u_{\vec{k}', \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} - \right. \\
& - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \left. \right\} \left(1 + \right. \\
& \left. + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right) (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{III \text{ trans}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{1}{\Delta_{III} E} \cdot u_{\vec{k}', \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \varrho_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\
& - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} \varrho_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{E_k}} \varrho_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \left. \right\} \times \\
& \times \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right) (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma}
\end{aligned}$$

Dasselbe wird für den vierten Prozeß gemacht, also

$$\begin{aligned}
\left\{ M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a} \right\} u_{-\vec{k}_0, \sigma'''}^* &= - W'' u_{-\vec{k}_0, \sigma'''}^* \\
\left\{ M c^2 \beta - \hbar c \vec{k}_0 \vec{a} \right\} u_{\vec{k}_0, \sigma'''} &= W'' u_{\vec{k}_0, \sigma'''} \quad (39)
\end{aligned}$$

und der Vernichtungsoperator lautet

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right\}. \quad (40)$$

Danach ergeben sich die Matrixelemente für den vierten Prozeß:

$$\begin{aligned} H_{AB}^{IV \text{ long}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{1}{A_{IV} E} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \right] \frac{\sqrt{2\pi}}{E_k} - \right. \\ & - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_k} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \right] \left\{ 1 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right\} (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} H_{AB}^{IV \text{ trans}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{1}{A_{IV} E} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \right] \frac{\sqrt{2\pi}}{E_k} q_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\ & - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \left[\frac{2\pi}{E_k} q_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \right] \left\{ \right. \\ & \left. \times \left(1 - \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}}{W''} \right) (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \right] \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhalten wir daher

$$\begin{aligned} (H_{AB}^{III} + H_{AB}^{IV})^{\text{long}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{W''}{E_0 M c^2} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \right] \frac{\sqrt{2\pi}}{E_k} - \right. \\ & - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - i g_2 \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_k} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \right] \left\{ (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \right. \\ & - \frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W''} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \right] \frac{\sqrt{2\pi}}{E_k} - g_1 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_1 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} - \right. \\ & \left. \left. - i g_2 \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_k} q_2 \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma} \right] \right\} (M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} (H_{AB}^{III} + H_{AB}^{IV})^{\text{trans}} = & -\frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{W''}{E_0 M c^2} \right. \\ & \times u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ i g_1 \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_k} q_1 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - g_2 \frac{\sqrt{2\pi E_k}}{\kappa} q_2 \vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{\sigma} - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \left[\frac{2\pi}{E_k} q_3 [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \vec{\sigma} \right] \right\} (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} e \hbar c \left[\frac{2\pi}{E_0} \frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W''} u_{\vec{k}' \sigma'}^* \left\{ \cdot \right\} (M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}_0 \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) u_{0\sigma} \right] \right. \end{aligned}$$

und abgekürzt

$$H_{AB}^{\text{long}} = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \{a + b\} u_{0\sigma}, \quad H_{AB}^{\text{trans}} = u_{\vec{k}' \sigma'}^* \{e + f\} u_{0\sigma}. \quad (43)$$

§ 5. Übergangswahrscheinlichkeit und Wirkungsquerschnitt.

Bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit, die wir zunächst für longitudinale und transversale Mesonen getrennt ausführen wollen, hat man über $\lambda_0 = 1, 2$ und σ zu mitteln, über σ' und $\lambda = 1, 2$ zu summieren. Damit findet man*

$$|\overline{H_{AB}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_0(\lambda)} \sum_{\sigma \sigma'} u_{\vec{k}' \sigma'}^* (a + b) u_{0\sigma} \cdot u_{0\sigma}^* (a^* + b^*) u_{\vec{k} \sigma} ; \quad (44)$$

die Summe über $\lambda = 1, 2$ kommt nur für transversale Mesonen in Betracht. Zu $u_{0\sigma}$ nehmen wir $u_{0\sigma}^{\frac{1}{2}}$ hinzu und wählen als Vernichtungsoperator

$$\frac{1}{2} (1 + \beta)$$

Wir summieren nun außer über σ noch über die Energievorzeichen und erhalten wegen der Orthogonalitätsrelationen

$$|\overline{H_{AB}}|^2 = \frac{1}{8} \sum_{\lambda_0(\lambda)} \sum_{\sigma'} u_{\vec{k}' \sigma'}^* (a - b) (1 + \beta) (a^* + b^*) u_{\vec{k} \sigma'} \quad (45)$$

Der Vernichtungsoperator für den Endzustand lautet

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right),$$

so daß (wieder nach der Polarisierung der Mesonen getrennt) nun folgt

$$\begin{aligned} |\overline{H_{AB}^{long}}|^2 &= \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0=1,2} Sp (a + b) (1 + \beta) (a^* + b^*) \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0=1,2} Sp a (1 + \beta) a^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right) \quad (1) \\ &+ \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0=1,2} Sp b (1 + \beta) a^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right) \quad (2) \\ &+ \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0=1,2} Sp a (1 + \beta) b^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right) \quad (3) \\ &+ \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0=1,2} Sp b (1 + \beta) b^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{\alpha}}{W_{k'}} \right) \quad (4) \quad (46) \end{aligned}$$

* Für transversale Mesonen ist natürlich a, b durch e, f zu ersetzen.

und ebenso

$$|\overline{H_{AB}^{trans}}|^2 = \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0, \lambda} Sp e (1 + \beta) e^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{a}}{W_{k'}} \right) \quad (1')$$

$$+ \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0, \lambda} Sp f (1 + \beta) e^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{a}}{W_{k'}} \right) \quad (2')$$

$$\therefore \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0, \lambda} Sp e (1 + \beta) f^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{a}}{W_{k'}} \right) \quad (3')$$

$$+ \frac{1}{16} \sum_{\lambda_0, \lambda} Sp f (1 + \beta) f^* \left(1 + \frac{M c^2 \beta + \hbar c \vec{k}' \vec{a}}{W_{k'}} \right) \quad (4') \quad (47)$$

Da (3) zu (2) und (3') zu (2') konjugiert komplex ist, folgt weiter

$$\left. \begin{aligned} |\overline{H_{AB}^{long}}|^2 &= (1) + 2 Re (2) + (4) \\ |\overline{H_{AB}^{trans}}|^2 &= (1') + 2 Re (2') + (4') \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Einige Regeln für die Spurenberechnung:

Die Spur eines Produktes von ϱ^s und σ^s ist Null, wenn nur ein Faktor ϱ oder σ auftritt. Ferner ist

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} &= \vec{v}_1 \vec{v}_2 + i [\vec{v}_1 \vec{v}_2] \vec{\sigma} \\ \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} \vec{v}_3 \vec{\sigma} &= \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{\sigma} + \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_1 \vec{\sigma} - \vec{v}_3 \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{\sigma} - i (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) \vec{\sigma} \\ \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} \vec{v}_3 \vec{\sigma} \vec{v}_4 \vec{\sigma} &= i \{ [\vec{v}_1 \vec{v}_2] [\vec{v}_3 \vec{v}_4] + (\vec{v}_3 \vec{v}_4) [\vec{v}_1 \vec{v}_2] - \\ & \quad [[\vec{v}_1 \vec{v}_2] \cdot [\vec{v}_3 \vec{v}_4]] \} \vec{\sigma} + \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4 - \vec{v}_1 \vec{v}_3 \vec{v}_2 \vec{v}_4 + \vec{v}_1 \vec{v}_4 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} Sp \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} &= \vec{v}_1 \vec{v}_2 \\ \frac{1}{4} Sp \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} \vec{v}_3 \vec{\sigma} &= i (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) \\ \frac{1}{4} Sp \vec{v}_1 \vec{\sigma} \vec{v}_2 \vec{\sigma} \vec{v}_3 \vec{\sigma} \vec{v}_4 \vec{\sigma} &= (\vec{v}_1 \vec{v}_2) (\vec{v}_3 \vec{v}_4) - (\vec{v}_1 \vec{v}_3) (\vec{v}_2 \vec{v}_4) + \\ & \quad + (\vec{v}_1 \vec{v}_4) (\vec{v}_2 \vec{v}_3) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Nach einiger Rechnung findet man nunmehr:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{4} \sum_{\lambda_0=1,2} \left\{ (|\vec{A}|^2 + |\vec{D}|^2) \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + |\vec{B} + i \vec{C}|^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2 \hbar c}{W_{k'}} \vec{A} (\vec{B} + i \vec{C}) \cdot \vec{k}' - \frac{2 \hbar c i}{W_{k'}} (\vec{B} + i \vec{C}, \vec{D}, \vec{k}') \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) = & -\frac{1}{8} e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{E_0 - M c^2}{M c^2 W'''} \sum_{\lambda_0} \left[-A' A^* \frac{\hbar c}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \right. \\
& \cdot \vec{k} + (B' - i C') A^* \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) + A' \left(1 - \right. \\
& \left. - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot (\vec{B}^* - i \vec{C}^*) + i (B' - i C') \cdot \\
& \cdot \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{D}^*) + i A' \frac{\hbar c}{W_{k'}} (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{D}^*, \vec{k}') \cdot \\
& + \frac{\hbar c}{W_{k'}} (B' - i C') \cdot \{ (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{B}^* - i \vec{C}^*) \cdot \vec{k} - (\vec{e}(\vec{k}), \vec{B}^* - \\
& i \vec{C}^*) \cdot (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}) + (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}') (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{B}^* - i \vec{C}^*) \} \Big] - \\
& - \frac{1}{8} e \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W'''} \times \sum_{\lambda_0} \left[i A' \hbar c \left(1 + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{D}^*) - (B' - i C') \hbar c \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \cdot \right. \\
& \cdot \{ (\vec{e}(\vec{k}), \vec{k}_0) \cdot (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{B}^* - i \vec{C}^*) - (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) \cdot \\
& \cdot (\vec{k}_0, \vec{B}^* - i \vec{C}^*) \} + (B' + i C') \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} A^* \times \{ (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') - \\
& - (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{k}_0 \vec{k}') \} - A' \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ (\vec{k}_0, \vec{B}^* - i \vec{C}^*) \cdot (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') - \\
& - (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{B}^* - i \vec{C}^*) \cdot (\vec{k}_0 \vec{k}') \} + i (B' + i C') \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \times \\
& \times \{ (\vec{e}(\vec{k}), \vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{D}^* \vec{k}') - (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{k}') \cdot \\
& \cdot (\vec{D}^* \cdot \vec{e}(\vec{k})) + (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{D}^*) \cdot (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}') \} \\
(4) = & \frac{1}{8} \left(\frac{W''}{E_0 M c^2} \right)^2 e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2\pi}{E_0} \left[A'^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + (B' - \right. \\
& - i C')^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + 2 A' (B' - i C') \frac{\hbar c}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}' \Big] - \\
& - \frac{1}{4} \frac{E_0 + M c^2}{(E_0 M c^2)^2} e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2\pi}{E_0} \left[A'^2 M c^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + \right. \\
& + B'^2 M c^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - C'^2 M c^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 i M c^2 B' C' \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - 2 A' B' \hbar c \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0 + \\
& + 2 i A' C' \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0 + 2 A' (B' - i C') \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}' - \\
& - (B'^2 + C'^2) \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}') - (\vec{k}_0 \vec{k}') \} - \\
& - A'^2 \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \vec{k}_0 \cdot \vec{k}' \left. \right] + \frac{1}{8} \left(\frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2} \right)^2 e \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \left\{ A'^2 + B'^2 - \right. \\
& - C'^2 - 2 i B' C' \frac{M c^2}{W_{k'}} + 2 A' B' \frac{\hbar c}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}' \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{E_0 M c^2}{W_{k'}} \right)^2 \left(\frac{1}{M^2 c^4} - \frac{1}{E_0^2} \right) c^2 \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \left\{ (A'^2 - B'^2 + \right. \\
& + C'^2) \frac{M c^2}{W_{k'}} + 2 i B' C' + 2 i A' C' \frac{\hbar c}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}' \left. \right\} \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W_{k'}} \right)^2 e^2 \hbar^3 c^3 \frac{2 \pi}{E_0} M c^2 \left[A'^2 \frac{\hbar c}{W_{k'}} \vec{k}_0 \cdot \vec{k}' + \right. \\
& + 2 A' B' \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0 - 2 i A' C' \frac{M c^2}{W_{k'}} \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0 + (B'^2 + \\
& + C'^2) \frac{\hbar c}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{k}') - \vec{k}_0 \vec{k}' \} \left. \right]. \quad (50)
\end{aligned}$$

Es wurde dabei zur Abkürzung gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} A' &= g_1 \frac{\hbar c k}{\varkappa} \sqrt{\frac{2 \pi}{E_k}} \\ B' &= -g_1 \frac{\sqrt{2 \pi E_k}}{\varkappa} \\ C' &= -i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2 \pi}{E_k}} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Daraus ersieht man, daß (1) bis (4) reell sind. Ebenso

$$\begin{aligned}
(1') &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'} \left[(|E|^2 + |\vec{H}|^2) \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + |\vec{F} + i \vec{G}|^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - \right. \\
& - \frac{2 \hbar c}{W_{k'}} E (\vec{F} + i \vec{G}) \cdot \vec{k}' - \frac{2 \hbar c i}{W_{k'}} (\vec{F} + i \vec{G}, \vec{H}, \vec{k}') \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2') = & -\frac{1}{8} e \hbar c \left[\sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{W''}{E_0 M c^2} \sum_{\lambda_0, \lambda} \left[(E' - i F') E^* \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) + i (E' - i F') \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{H}^*) - \right. \right. \\
& - i G' \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \cdot ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) - \\
& - i G' E^* \frac{\hbar c}{W_{k'}} ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{k}') + (E' - i F') \frac{\hbar c}{W_{k'}} \{ (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{F}^* - i \vec{G}^*, \vec{k}') - (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') + \\
& + (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}') (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) \}] - \\
& - G' \frac{\hbar c}{W_{k'}} \{ (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{H}^* \vec{k}') - (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{H}^*) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') + \\
& + (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{H}^*) \} \left] - \frac{1}{8} e \hbar c \left[\sqrt{\frac{2\pi}{E_0}} \frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W''} \sum_{\lambda_0, \lambda} \left[- \right. \right. \\
& - (E' - i F') E^* M c^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) - \\
& - i (E' - i F') M c^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{H}^*) + \\
& + i G' M c^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \cdot ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) + \\
& + i G' \hbar c E^* \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) + \\
& + i G' \hbar c E^* \frac{M c^2}{W_{k'}} ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{k}') + \\
& + (E' + i F') \hbar c \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \cdot \{ (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) - \\
& - (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{k}_0, \vec{F}^* - i \vec{G}^*) \} + \\
& + (E' + i F') \frac{\hbar c^2}{W_{k'}} E^* \{ (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') - \\
& - (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{k}_0 \vec{k}') - (E' - i F') \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} \{ (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{F}^* - \\
& - i \vec{G}^*, \vec{k}') - (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') + \\
& + (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}') (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) \} + i G' \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [\vec{k}_0 \cdot \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)] (\vec{F}^* - i \vec{G}^*, \vec{k}') - (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{k}') + \\
& + (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{F}^* - i \vec{G}^*) \} + \\
& + G' \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} \{ (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{H}^*) - (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) \cdot \\
& \cdot (\vec{k}_0 \vec{H}^*) \} + G' \hbar c \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) \{ (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{H}^* \cdot \vec{k}') - \\
& - (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{H}^*) (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}') + (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{H}^*) \} + \\
& + i (E' + i F') \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0)) (\vec{H}^* \cdot \vec{k}') - \\
& - (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{H}^*) (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{k}') + (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}') (\vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0), \vec{H}^*) \} \Big] \\
(4') = & \frac{1}{8} \left(\frac{W''}{E_0 M c^2} \right)^2 e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \sum_{\lambda} \left[- (E' - i F')^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) + \right. \\
& + G'^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - 2 i G' (E' - i F') \frac{\hbar c}{W_{k'}} (\vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') \Big] - \\
& + \frac{1}{4} \frac{E_0 + M c^2}{(E_0 M c^2)^2} e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \sum_{\lambda} \left[(E' - i F')^2 M c^2 \left(1 + \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - \right. \\
& - G'^2 M c^2 \left(1 - \frac{M c^2}{W_{k'}} \right) - 2 i E' G' \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k} \lambda)) \\
& - 2 F' G' \hbar c (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0, \vec{e}(\vec{k} \lambda)) - \\
& - 2 (E' - i F') i G' \hbar c \frac{M c^2}{W_{k'}} (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') - \\
& (E'^2 + F'^2) \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}') - (\vec{k}_0 \vec{k}') \} - \\
& - G'^2 \frac{\hbar^2 c^2}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') - \vec{k}_0 \cdot \vec{k}' \} \Big] + \\
& \frac{1}{8} \left(\frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2} \right)^2 e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \sum_{\lambda} \left[- E'^2 - F'^2 - G'^2 + 2 i E' F' \frac{M c^2}{W_{k'}} - \right. \\
& + 2 F' G' \frac{\hbar c}{W_{k'}} (\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') \Big] + \frac{1}{8} \left(\frac{E_0 + M c^2}{W''} \right)^2 \left(\frac{1}{E_0^2} - \right. \\
& \left. \frac{1}{M^2 c^4} \right) e^2 \hbar^2 c^2 \frac{2 \pi}{E_0} \sum_{\lambda} \left\{ 2 i E' F' - (E'^2 - F'^2 + G'^2) \frac{M c^2}{W_{k'}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 i E' G' \frac{\hbar c}{W_{k'}} ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') \Big\} - \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{E_0 + M c^2}{E_0 M c^2 W_{k'}} \right)^2 c^2 \hbar^3 c^3 \frac{2 \pi}{E_0} M c^2 \sum_{\lambda} \left[2 F' G' ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0) \right. \\
& \cdot 2 i E' G' \frac{M c^2}{W_{k'}} ([\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)], \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0) - \\
& - (E'^2 + F'^2) \frac{\hbar c}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{k}') - (\vec{k}_0 \vec{k}') \} - \\
& \left. - G'^2 \frac{\hbar c}{W_{k'}} \{ 2 (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}_0) (\vec{e}(\vec{k}), \vec{e}(\vec{k} \lambda), \vec{k}') - (\vec{k}_0 \vec{k}') \} \right] \quad (50')
\end{aligned}$$

Dabei bedeuten

$$\left. \begin{aligned} E' &= i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2 \pi}{E_k}} \\ F' &= -g_2 \frac{\sqrt{2 \pi E_k}}{\kappa} \\ G' &= -g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2 \pi}{E_k}} \end{aligned} \right\} \quad (51')$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozeß ist gegeben durch

$$d\Phi = \frac{2 \pi}{\hbar c} |H_{AB}|^2 \frac{\partial k}{\partial (E_k + W_{k'})} \frac{k^2}{(2 \pi)^2} d\Omega \quad (52)$$

Hiebei ist

$$\frac{\partial k}{\partial (E_k + W_{k'})} = \frac{2 k E_k W_{k'}}{2 E_0 E_k M c^2 - m_U^2 c^4 (2 W_{k'} + E_k)}, \quad (53)$$

wie die Anwendung von Impuls- und Energiesatz ergibt.

§ 6. Näherung und Diskussion.

Die Energiegleichung

$$E_0 + M c^2 = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + m_U^2 c^4} + \sqrt{\hbar^2 c^2 k'^2 + M^2 c^4} \quad (54)$$

zeigt, daß

$$\hbar c k_0 = E_0 \geq m_U c^2 = \hbar c \kappa$$

somit

$$k_0 \geq \kappa. \quad (55)$$

Der betrachtete Effekt besitzt daher, ähnlich dem Photoeffekt, eine langwellige Grenze. Es wird daher zweckmäßig sein, zwei Grenzfälle zu betrachten, nämlich das Verhalten in der Nähe der genannten Grenze (kleine Energie des einfallenden Photons) und den Bereich sehr großer Photonenergie.

1. *Kleine Energie.*

Hier ist

$$k_0 \doteq \kappa$$

$$E_0 \doteq E_k \doteq m_U c^2, \quad W_{k'} \doteq M c^2, \quad W'' \doteq M c^2 \left[1 + \left(\frac{m_U}{M} \right)^2 \right] \doteq M c^2. \quad (56)$$

Ferner nehmen wir an

$$|\vec{k}'| = k' = \kappa$$

dann wird

$$E_{k'}^2 \doteq 2 m_U^2 c^4 \quad (57)$$

Mit dieser Näherung wird

$$\left. \begin{aligned} A' &\doteq g_1 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar c \kappa}} \\ B' &\doteq -g_1 \frac{\sqrt{2\pi \hbar c \kappa}}{\kappa} \\ C' &\doteq -i g_2 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar c \kappa}} \end{aligned} \right\} \quad (58 \text{ a})$$

$$\left. \begin{aligned} E' &\doteq i g_1 \hbar c \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar c \kappa}} \\ F' &\doteq -g_2 \frac{\sqrt{2\pi \hbar c \kappa}}{\kappa} \\ G' &\doteq -g_2 \frac{\hbar c k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar c \kappa}} \end{aligned} \right\} \quad (58 \text{ b})$$

Weiters setzen wir

$$g_1 = g_2 = g. \quad (59)$$

Damit erhält man

$$\left. \begin{aligned} A' &\doteq g \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{\kappa}} \\ B' + i C' &\doteq 0, \quad B' - i C' \doteq -2g \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{\kappa}} \\ E' + i F' &\doteq 0, \quad E' - i F' \doteq 2ig \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{\kappa}} \\ G' &\doteq -g \frac{k}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{\kappa}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Aus den oben angegebenen Näherungsannahmen folgt

$$\hbar^2 \ll \kappa^2 \quad (61)$$

und

$$\begin{aligned}
 A &\doteq -\frac{\pi g e}{\kappa^2} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}) \\
 \vec{B} &\doteq \frac{\pi g e}{\kappa^2} \sum_{\lambda'} ([\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')]) \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \\
 \vec{C} &\doteq \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \left\{ (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})) \vec{e}(\vec{k}') - 2 \frac{k}{\kappa} \sum_{\lambda'} (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \right\} \\
 \vec{D} &\doteq \frac{2 \pi i g e}{\kappa^2} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] - \\
 &- \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \sum_{\lambda'} ([\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k})] \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')]) \cdot [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] \\
 E &\doteq \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda) \\
 \vec{F} &\doteq \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \left[\frac{2 k}{\kappa} ([\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k}')] \cdot [\vec{e}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)]) \vec{e}(\vec{k}') - \right. \\
 &- \frac{1}{\kappa} \sum_{\lambda'} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - \\
 &- 2 (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \vec{e}(\vec{k}' \lambda') \left. \right] \\
 \vec{G} &\doteq \frac{\pi g e}{\kappa^2} (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)) \vec{e}(\vec{k}') \\
 \vec{H} &\doteq \frac{2 \pi g e}{\kappa^2} [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{e}(\vec{k} \lambda)] - \frac{\pi g e}{\kappa^2} \frac{1}{\kappa} \sum_{\lambda'} \{ [\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}_0] \cdot \\
 &\cdot [\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')] - 2 (\vec{e}(\vec{k}_0 \lambda_0) \cdot \vec{k}) (\vec{e}(\vec{k} \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')) \} [\vec{e}(\vec{k}') \cdot \vec{e}(\vec{k}' \lambda')]
 \end{aligned}$$

Bedenken wir noch, daß k_0 und k' ungefähr gleich sind und jedenfalls k klein gegen diese beiden ist, so sehen wir, daß χ sehr klein wird. Daher lassen wir Glieder mit $\sin \chi$ weg, und setzen ferner

$$\cos \chi \doteq 1, \quad \cos(\chi + \Theta) \doteq \cos \Theta \quad (62)$$

Damit ergibt sich näherungsweise für $\lambda_0 = 1$

$$\begin{aligned}
 A &\doteq 0, \quad \vec{B} \doteq -\frac{\pi g e}{\kappa^2} \cos \Theta_1 \vec{e}_2, \quad \vec{C} \doteq -\frac{2 \pi i g e}{\kappa^2} \frac{k}{\kappa} \vec{e}_2, \\
 \vec{D} &\doteq -\frac{2 \pi i g e}{\kappa^2} \sin \Theta \cdot \vec{e}_1 - \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \cos \Theta \cdot \vec{e}_3.
 \end{aligned}$$

Für $\lambda_0 = 2$

$$A \doteq \frac{\pi g e}{\kappa^2} \sin \Theta, \quad \vec{B} = -\frac{\pi g e}{\kappa^2} \cos \Theta \cdot \vec{e}_3,$$

$$\vec{C} \doteq -\frac{\pi i g e}{\kappa^2} \sin \Theta \cdot \vec{e}_1 - 2 \frac{\pi i g e k}{\kappa^2 \kappa} \vec{e}_3, \quad \vec{D} \doteq \frac{\pi i g e}{\kappa^2} \cos \Theta \cdot \vec{e}_2.$$

Damit findet man schließlich

$$(1) \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \left\{ \left(5 + \frac{m_U}{M} \right) - \left(3 - \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta - 4 \frac{m_U k}{M \kappa} \cos \Theta \right\}$$

$$(2) \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \frac{m_U}{M} \left\{ 6 + 2 \frac{k}{\kappa} \cos \Theta - 2 \cos^2 \Theta \right\}$$

(4) $\doteq 0$, in der hier behandelten Näherung. Man erkennt sehr deutlich, daß den überwiegenden Teil der Übergangswahrscheinlichkeit bei kleiner Energie des einfallenden Photons die Prozesse I und II liefern, eine Rechtfertigung der früheren Arbeit (l. c.). Daraus erhält man

$$|\bar{H}_{AB}^{long}|^2 \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \left\{ \left(5 + 13 \frac{m_U}{M} \right) - \left(3 + 3 \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta \right\} \quad (63)$$

Für transversale Mesonen erhält man analog

$$(1') \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \left\{ \left(8 + 4 \frac{m_U}{M} \right) - \left(1 + 2 \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta + \left(4 - 4 \frac{m_U}{M} \right) \frac{k}{\kappa} \cos \Theta - \left(4 - 2 \frac{m_U}{M} \right) \frac{k}{\kappa} \cos^3 \Theta \right\}$$

$$(2') \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \frac{m_U}{M} \left\{ 12 + 6 \frac{k}{\kappa} \cos \Theta - 4 \frac{k}{\kappa} \cos^3 \Theta \right\}$$

(4') $\doteq 0$. Und daher

$$|\bar{H}_{AB}^{trans}|^2 \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \left\{ \left(8 + 28 \frac{m_U}{M} \right) - \left(1 + 2 \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta + \left(4 + 8 \frac{m_U}{M} \right) \frac{k}{\kappa} \cos \Theta - \left(4 + 6 \frac{m_U}{M} \right) \frac{k}{\kappa} \cos^3 \Theta \right\} \quad (64)$$

Dabei ist jedoch folgendes zu beachten: Wir haben $\sin \chi \doteq 0$ gesetzt. Korrekter wäre die Näherung

$$\sin \chi \doteq \frac{k}{\kappa} \cdot \sin \Theta,$$

wie aus dem Impulsdreieck ersichtlich ist. Es sind daher die Ausdrücke $\text{prop. } k/\kappa$ nicht exakt, wir lassen sie somit ganz weg, was nur eine Vernachlässigung von Termen $\text{prop. } v/c$ (v = Mesonengeschwindigkeit) bedeutet. Addition ergibt nun die totale Übergangswahrscheinlichkeit

$$|\bar{H}_{AB}|^2 \doteq \frac{1}{2} \frac{\pi^2 g^2 e^2}{\kappa^4} \left\{ \left(13 + 41 \frac{m_U}{M} \right) - \left(4 + 5 \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta \right\}; \quad (65)$$

mit

$$\frac{\partial k}{\partial (E_k + W_{k'})} = \frac{W_{k'} \cdot E_k^2}{E_0 M c^2 \hbar^2 c^2 k} = \frac{E_k^2}{m_U c^2 \cdot \hbar^2 c^2 k} = \frac{\kappa}{\hbar c k}$$

ist daher

$$d\Phi = \frac{1}{8} \left(\frac{g e}{m_U c^2} \right)^2 \left\{ \left(13 + 41 \frac{m_U}{M} \right) - \left(4 + 5 \frac{m_U}{M} \right) \cos^2 \Theta \right\} \frac{v}{c} d\Omega; \quad (66)$$

denn es ist der Impuls des Mesons

$$\begin{aligned} p = \hbar k &= \frac{m_U v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_U v \\ k &= \frac{m_U v}{\hbar} \\ \frac{k}{\kappa} &= \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Die Integration über die räumlichen Winkel ergibt für den totalen WQ

$$\Phi = \left(5,8 + 19,7 \frac{m_U}{M} \right) \pi \left(\frac{g e}{m_U c^2} \right)^2 \cdot \frac{v}{c}. \quad (67)$$

Dieser Wert weicht nur wenig von dem (l. c.) gefundenen ab.

Tabelle.

Wir geben den Zusammenhang zwischen m_U und dem m_U enthaltenden Faktor von Φ , nämlich $f = \left(5,8 + 19,7 \frac{m_U}{M} \right) \left(\frac{M}{m_U} \right)^2$ (m_U in Elektronenmassen)

m_U	f
180	805
210	620
240	490
270	405
300	340

2. Große Energie.

$$E_0 \gg m_U c^2$$

das heißt

$$k_0 \gg \kappa \quad (68)$$

Um uns über den Bereich von k' klar zu werden, ziehen wir Energie- und Impulssatz heran, die wir in der Form niederschreiben wollen

$$\begin{aligned} \sqrt{M^2 c^4 + \hbar^2 c^2 (k_0 - k)^2} + 2 \hbar^2 c^2 k k_0 (1 - \cos \Theta) - M c^2 &= \\ = \hbar c k_0 - \hbar c \sqrt{k^2 + \kappa^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$k'^2 = (k_0 - k)^2 + 2 k k_0 (1 - \cos \Theta)$$

$\Theta = 0$.

Setzen wir in der ersten Gleichung $k = k_0$, so verschwindet die linke Seite, während die rechte die Größenordnung $m_U c^2 \cdot \kappa / k_0$ gewiß nicht übersteigt, was sehr klein etwa gegen $\hbar c k_0 = E_0$ ist. Man vermutet daher $k \lesssim k_0$, was man sofort bestätigt findet, wenn man links $k = k_0$ setzt und aus der rechten Seite einen Wert $k = k_1$ berechnet, diesen links einsetzt und k_2 berechnet usw. Man findet so

$$k_1 = k_0 \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k_0^2}} = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_0^2} \right) \text{ usw.}$$

Daher kann man k angenähert gleich k_0 und k' angenähert gleich Null setzen. Daß k kleiner als k_0 sein muß, sieht man sofort. Geht man von k_0 gegen kleinere Werte, so nimmt die linke Seite zu, wird positiv, die rechte Seite, die zuerst negativ ist, geht gegen Null und nimmt dann positive Werte an. Beide nehmen in Richtung von kleineren Werten von k monoton zu. Der Verlauf ist graphisch etwa folgender:

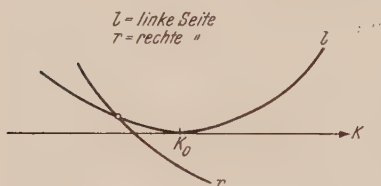


Abb. 2.

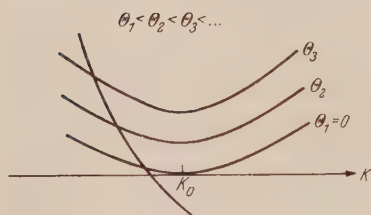


Abb. 3.

$\Theta > 0$.

Hier ist für jedes k die linke Seite größer als für $\Theta = 0$. Deshalb wird dieses „Einholen“ erst später, das heißt bei einem kleineren Wert von k stattfinden (s. Abb. 3). Aus der Energiegleichung folgt, daß dann die entsprechenden Werte k' größer sind als vorhin. Somit nimmt k' mit wachsendem Θ zu, und zwar gewiß über k_0 hinaus. Nach A. MARCH begrenzen wir, wie es auch schon in früheren Arbeiten getan wurde, das Impulsspektrum durch die Festsetzung $k' \leq \kappa$. Damit wird ein

verhältnismäßig schmaler Teil des Mesonspektrums (sin $\Theta \leq k'/k_0 \leq \kappa/k_0$) ausgeblendet und der Wirkungsquerschnitt für diesen Bereich berechnet. Der zugehörige Winkel läßt sich leicht angeben.

Wir wollen nun Reihenentwicklungen für die benötigten Größen anschreiben, wobei wir bis κ^2/k_0^2 gehen wollen. Zunächst ist

$$W_{k'} - M c^2 = M c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4} + \dots \right) - M c^2 = \frac{1}{2} M c^2 \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4},$$

was genügen dürfte. Aus dem Energiesatz folgt

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2 \left(1 - \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} - \frac{\kappa^2}{k_0^2} + \dots \right); & k^2 &= k_0^2 \left(1 - \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} \right) \\ k &= k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_0^2} + \dots \right); & k &= k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

$$E_k = \hbar c k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \dots \right);$$

$$\left[(E_0 - E_k)^2 - E_{k'}^2 \right]^{-1} = - \frac{1}{\hbar^2 c^2 (k'^2 + \kappa^2)} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4} \frac{k'^2}{k'^2 + \kappa^2} + \dots \right);$$

$$\cos \Theta = 1 - \frac{1}{2} \frac{k'^2}{k_0^2} + \dots$$

$$k' \cos (\chi + \Theta) = k_0 \cos \Theta - k = k_0 \left(\frac{1}{2} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_0^2} - \frac{1}{2} \frac{k'^2}{k_0^2} + \dots \right)$$

$$\frac{M c^2}{W_{k'}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4} + \dots; \quad \sin \Theta = \frac{k'}{k_0} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4} + \dots \right);$$

$$\sin \chi = 1 - \frac{1}{8} \frac{\hbar^2 c^2 k'^2}{M^2 c^4} + \dots; \quad \cos \chi = \frac{1}{2} \frac{\hbar c k'}{M c^2} + \dots;$$

Weiters setzen wir noch $g_1 = g_2 = g$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_0^2} + \dots \right) \\ B' &= - \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \dots \right) \\ C' &= -i \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \cdot \frac{\kappa}{k_0} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \dots \right) \\ E' &= i \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \cdot \frac{\kappa}{k_0} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \dots \right) \\ F' &= - \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} + \dots \right) \\ G' &= - \frac{g}{\kappa} \sqrt{2\pi \hbar c k_0} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{k' \hbar c k'}{k_0 M c^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k_0^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Mittels dieser Entwicklungen wären nun geeignete Abschätzungen für A , $\vec{B}$, $\vec{C}$, ... anzugeben, in den früheren allgemeinen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit einzusetzen und durch Integration der totale WQ zu finden. Um die Rückstoßwirkung in Rechnung zu setzen, darf man nicht zu ungenau abschätzen, was die Rechnung zu mühevoll und zeitraubend macht. Sie wurde daher hier unterlassen und soll an anderer Stelle gelegentlich mitgeteilt werden.

Die Zündspannung von Gasentladungen unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes im Druckbereich von 10 bis 10^{-8} Torr.

Von

R. Haefler, Berlin.

Mit 18 Abbildungen.

(Eingelangt am 27. Oktober 1952.)

Zusammenfassung.

Es wird experimentell nachgewiesen, daß sich eine selbständige elektrische Gasentladung unter dem Einfluß eines zum elektrischen Feld transversalen Magnetfeldes bis zu den kleinsten herstellbaren Drucken (10^{-8} Torr) herab zünden läßt. Zu diesem Zweck wird eine zylindrische Elektrodenanordnung mit einem konaxialen Magnetfeld verwendet. Der äußere Zylinder ist Kathode. Das Elektroden-system ist zur Vermeidung von Trägerverlusten an den beiden Endflächen verschlossen. Zur Zündung bei $1,5 \cdot 10^{-8}$ Torr ist bei geeignet gewählter magnetischer Feldstärke eine Spannung von 2200 V ausreichend.

Auf Grund der eigenen Messungen sowie der Diskussion der Meßergebnisse von WEHRLI [3] und PENNING [4] werden folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden:

1. Es besteht folgendes Ähnlichkeitsgesetz: Bei gegebenem Wert $p \times$ Elektrodenabstand d , gegebener Gasart und gegebenem Elektrodenmaterial ist die Zündspannung U eine Funktion nur des Produktes magnetische Feldstärke $H \times$ Elektrodenabstand d : $U = F(pd, Hd)$. Dieses Gesetz gilt streng nur bei homogenen elektrischen Feldern, angenähert aber auch bei inhomogenen elektrischen Feldern. Wesentliche Voraussetzung für die Anwendung dieses Gesetzes ist, daß die Elektronen bei geometrisch ähnlichen Anordnungen an homologen Stellen der Kathoden ausgelöst werden. Das Ähnlichkeitsgesetz erlaubt somit Rückschlüsse auf den Ort der Elektronenauslösung.

2. Es existiert ein kritischer Wert $(pd)_k$, oberhalb dessen ein transversales Magnetfeld die Zündspannung erhöht, während es unterhalb dessen die Zündspannung erniedrigt. Dieser kritische Wert beträgt bei Luft $(pd)_k = 1,07$ Torr cm. Er ist größer als $(pd)_{min}$, wo die minimale Zündspannung ohne Magnetfeld vorliegt.

3. Oberhalb $(pd)_k$ folgt die Zündkennlinie — das heißt U als Funktion von Hd bei gegebenem pd — einem Gesetz: $U - U_0 = \text{const.} \cdot (Hd)^2$.

4. Unterhalb $(pd)_k$ bis zu Werten von 10^{-3} Torr cm herab fällt die Zündkennlinie von dem Zündspannungswert U_0 ohne Magnetfeld zunächst parabolisch ab ($U - U_0 = -\text{const.} \cdot (Hd)^2$), erreicht ein Minimum U_{min} und steigt dann wieder an. Das Minimum U_{min} kann wesentlich niedriger sein als die minimale Zündspannung ohne Magnetfeld.

5. Einen gänzlich anderen Verlauf zeigen die Zündkennlinien bei niedrigeren Drucken ($pd < 10^{-2}$ Torr cm). Hier fällt die Zündkennlinie zunächst von dem sehr hohen Wert, den die Zündspannung ohne Magnetfeld hat, ab und geht in einen parabolischen Teil $U = \text{const.} \cdot (Hd)^2$ über, bei dem mit abnehmender Spannung auch das Magnetfeld abnimmt. Es wird ein minimales Magnetfeld $(Hd)_{\min}$ erreicht, unterhalb dessen keine magnetische Zündung erfolgt, es sei denn bei sehr hohen Spannungen. Anschließend geht die Zündkennlinie über einen Minimalwert der Spannung $U_{\min}$ in einen wieder ansteigenden Teil über. In einem gewissen Hd -Bereich ist die Zündspannung also dreiwertig.

Bisherige Deutungsversuche, die allein von der Vorstellung ausgehen, daß das transversale Magnetfeld durch Verringerung der mittleren freien Fallhöhe der Elektronen im Sinne einer Druckerhöhung wirkt, führen zu Folgerungen, die mit der Erfahrung nicht im Einklang sind. Der Grund für das Versagen einer solchen Deutung liegt darin, daß die Ionisierungszahl α nicht allein eine Funktion der mittleren freien Fallhöhe sondern auch des Verteilungsgesetzes der freien Fallhöhen der Elektronen ist. Das Verteilungsgesetz ist aber bei Vorhandensein eines transversalen Magnetfeldes ein grundsätzlich anderes als ohne Magnetfeld. Aus diesem Grunde wird unter vereinfachenden Annahmen über die Bewegung der Elektronen und die Ionisierungswahrscheinlichkeit das Verteilungsgesetz der freien Fallhöhen bei Vorhandensein eines zum homogenen elektrischen Feld transversalen Magnetfeldes berechnet. Daraus wird weiter die mittlere freie Fallhöhe und nach einem bekannten Ansatz die Ionisierungszahl α ermittelt. Führt man die so gewonnene Größe α in die TOWNSENDSche Zündbedingung ein, die der adäquate Ausdruck für den Lawinaufbau der Entladung ist, so enthält diese Zündbedingung implizit die Gleichung der Zündkennlinie. Die rechnerische Durchführung wird einfach für zwei Sonderfälle:

a) Die mittlere freie Weglänge ist klein gegen den Rollkreisdurchmesser der Zykloidenbahn des Elektrons. Es ergeben sich die Gesetze für den kritischen Wert $(pd)_k$ und den Anfangsverlauf der Zündkennlinien sowohl für $pd > (pd)_k$ wie auch für $pd < (pd)_k$.

b) Die mittlere freie Weglänge ist groß gegen den Rollkreisdurchmesser der Zykloidenbahn. Es ergibt sich der Verlauf der Zündkennlinie bei niedrigem Druck ($pd < 10^{-2}$ Torr cm): Parabelgesetz $U \sim (Hd)^2$, die Größen $(Hd)_{\min}$ und $U_{\min}$ und der lineare Anstieg bei hohen Hd . Die Dreideutigkeit der Zündspannung in einem gewissen Hd -Bereich wird durch das Vorhandensein von zwei Extremalwerten der Ionisierungszahl α als Funktion der Spannung U bei gegebenem Hd erklärt. Ferner ergeben sich besondere Vorschriften über die Art und Weise, wie die einzelnen Abschnitte der Zündkennlinie bei konstantem Hd , bzw. konstantem U durch Verändern von U , bzw. Hd zu realisieren sind.

Sowohl im Fall a wie auch im Fall b folgt aus den theoretischen Gesetzmäßigkeiten das Ähnlichkeitsgesetz, da nur jeweils die Produkte Hd und pd auftreten.

Hinsichtlich der Druckabhängigkeit sind Fall a und b voneinander grundsätzlich verschieden. Im Fall a ist die Ionisierungszahl α druckabhängig, die Rückführungsgröße γ hingegen nicht vom Druck abhängig. Im Fall b ist es umgekehrt: α druckunabhängig und γ druckabhängig. Die Druckabhängigkeit von γ im Fall b erklärt sich aus dem Effekt der Wiederaufnahme eines einmal befreiten Elektrons durch die Kathode, wenn das Elektron auf dem ersten Zykloidenbogen keinen unelastischen Zusammenstoß mit einem Gasatom erleidet, durch den allein es frei bleiben kann. γ sinkt mit abnehmendem Druck.

Da die Theorie unter den Annahmen eines homogenen elektrischen Feldes und einer konstanten Rückführungsgröße γ durchgeführt wird, eignen sich zu ihrer quantitativen Prüfung nur die Messungen von WEHRLI im pd -Bereich

10 bis 10^{-2} Torr cm. Es wird in allen Punkten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gefunden. Nur in bezug auf den ansteigenden Teil der Zündkennlinie bei hohen Hd wird ein Abweichen von der Theorie beobachtet. Während nämlich bei der Theorie nur unelastische Stöße des Elektrons vorausgesetzt werden, verläuft hier der Zündvorgang in der Weise, daß das Elektron auf dem Wege über eine Reihe von elastischen Stößen eine zur Ionisierung ausreichende Energie akkumuliert.

Die Messungen von PENNING und vom Verfasser bei niedrigen Drucken wurden bei inhomogenen Feldern ausgeführt. Außerdem ist hier die Rückführungsgröße γ wegen des Wiederaufnahmeeffektes keine Konstante mehr. Aus diesen Gründen kann bei niedrigen Drucken der Vergleich zwischen Theorie und Experiment nur qualitativ durchgeführt werden. In qualitativer Hinsicht stimmen aber Theorie und Erfahrung in allen Einzelheiten auch im Bereich niedriger Drucke überein. Es bedarf zur quantitativen Prüfung der Theorie noch einer Berücksichtigung der Inhomogenität des elektrischen Feldes und des Zusammenhanges zwischen Druck und Rückführungsgröße, die an späterer Stelle erfolgen wird.

I. Problemstellung und Gang der Untersuchung.

Die Einwirkung eines Magnetfeldes auf die Erscheinungen in einer Gasentladung ist bisher verhältnismäßig wenig untersucht worden. Zieht man andererseits die Tatsache in Betracht, daß Gasentladungen im Magnetfeld recht interessante Anwendungen zulassen, so gewinnt man den Eindruck, daß es sich hier um ein vernachlässigtes Arbeitsgebiet handelt. Eine Anwendung meßtechnischer Art ist z. B. ein Ionisationsmanometer mit kalter Kathode.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Zündspannung einer Gasentladung unter der Einwirkung eines elektrischen und eines dazu *transversalen* magnetischen Feldes.

Ältere Untersuchungen über diesen Gegenstand [1], [2], die an ebenen, seitlich offenen Entladungsstrecken vorgenommen wurden, führten zu widerspruchsvollen und schwer deutbaren Ergebnissen, weil sich die Elektronen unter der Einwirkung des transversalen, das heißt zu den elektrischen Feldlinien senkrecht stehenden Magnetfeldes aus dem Entladungsraum herausbewegen und damit für die weitere Ionisierung verloren gehen. Die ersten einwandfreien Messungen, bei denen diese Fehlerquelle vermieden wird, wurden 1922 von WEHRLI [3] ausgeführt. Er verwendet eine Entladungsstrecke, die durch den Raum zwischen zwei konaxialen Zylindern gebildet wird, deren lichter Abstand klein gegen ihren Durchmesser ist. Das elektrische Feld ist infolgedessen praktisch noch homogen. Das Magnetfeld ist parallel zur Zylinderachse gerichtet und ebenfalls homogen. WEHRLI untersucht das Verhalten der Zündspannung in Luft im pd -Bereich zwischen 10 und 10^{-2} Torr cm, das heißt in dem Gebiet, in dem die Zündspannung ohne Magnetfeld ihr Minimum durchläuft.

Versucht man die Untersuchung nach kleineren pd -Werten, das heißt also praktisch nach kleineren Drucken hin auszudehnen, so sind falls die Forderung der Homogenität des elektrischen Feldes bestehen bleibt sehr bald Versuchsanordnungen nötig, deren Ab-

messungen etwa das Zehnfache derjenigen der WEHRLISCHEN Anordnung (Abb. 1) betragen und die daher unhandlich sind. Dies dürfte der Grund dafür sein, daß spätere Bearbeiter auf die Homogenität des elektrischen Feldes verzichteten zugunsten eines möglichst ausgedehnten Entladungsraumes. Auf diese Weise gelang es PENNING [4], die genannten Erscheinungen in Argon bis 10^{-5} Torr herab zu verfolgen und bei diesem niedrigen Druck noch bei 300 Gauß und 3500 V eine Entladung zu zünden. Später konnte vom Verfasser [5] ebenfalls mit Hilfe einer zylindrischen Elektrodenanordnung mit axial gerichtetem Magnetfeld experimentell sichergestellt werden, daß es möglich ist, auch im Bereich des Hochvakuums bis zu den kleinsten herstellbaren Drucken herab ($< 10^{-8}$ Torr) eine Entladung zu zünden und daß z. B. zur Zündung in Argon von 10^{-8} Torr eine Spannung von nur 2200 V ausreichend ist. Die dazu verwendete Anordnung hatte allerdings hinsichtlich der Rückführung (γ -Prozeß) günstigere Abmessungen als die PENNINGSCHE.¹

Obleich die letztgenannten Untersuchungen bei inhomogenen elektrischen Feldern einen wesentlich größeren Druckbereich umfassen als die WEHRLISCHEN Messungen, so sind doch gerade die letzteren aus folgenden Gründen besonders interessant:

1. Die Messungen von WEHRLI sind bei praktisch homogenen elektrischen und magnetischen Feldern ausgeführt.

2. Sie liegen in einem Druckbereich, in dem wir die Ausbeute γ an Elektronen, die pro Ion an der Kathode durch Stoß befreit werden, als konstant annehmen können im Gegensatz zu den Messungen bei kleineren Drucken.

3. Bei ihnen liegen in Bezug auf die Elektronenbefreiung an der Kathode übersichtliche Verhältnisse vor: Dadurch, daß nämlich der zylinderringförmige Entladungsraum seitlich mit isolierenden Wänden (Abb. 1) abgeschlossen ist, können Elektronen *nur* aus dem kathodischen *Zylindermantel* durch Ionenstoß ausgelöst werden. Bei den Anordnungen von PENNING und vom Verfasser hingegen befinden sich an Stelle der isolierenden Seitenwände solche aus Metall, die mit der Kathode verbunden sind und, da auch sie von Ionen getroffen werden, an der Elektronennachlieferung in einem Ausmaße beteiligt sein können, das quantitativ schwer zu erfassen ist. Damit ist auch die Zahl der ionisierenden Stöße, die ein an der Kathode startendes Elektron im Mittel auf seinem Wege zur Anode ausführt und die maßgebend für die Berechnung der Zündspannung ist, schwierig zu ermitteln als im Fall des homogenen elektrischen Feldes.

¹ Ebenfalls günstigere Eigenschaften als die zylindrische Anordnung von PENNING [4] in Bezug auf den Rückführungsprozeß hat die Anordnung von F. M. PENNING und K. NIENHUIS (Philips Techn. Rev. **11**, 116, 1949) zur Messung niedriger Drucke. Hier ist zur Messung bis zu 10^{-7} Torr herab eine Spannung von 2000 Volt ausreichend. Da dieses Ionisationsmanometer nicht zylindersymmetrisch aufgebaut ist, soll in diesem Zusammenhang nicht näher darauf eingegangen werden.

Aus diesen drei Gründen sind also die Verhältnisse bei den Untersuchungen von WEHRLI besonders übersichtlich. Dies ist ein Umstand, der sie zur Prüfung einer Theorie der Zündung einer Gasentladung unter der Einwirkung eines transversalen Magnetfeldes besonders geeignet macht. Eine solche Theorie für homogene elektrische und magnetische Felder zu entwickeln und sie an Hand des vorliegenden Beobachtungsmaterials zu prüfen, soll aber der Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

WEHRLI gibt seine Meßergebnisse in ausführlichen Tabellen und Diagrammen wieder. Da er aber noch keinen Gebrauch von Ähnlichkeitsgesetzen macht, ist seine Darstellung für eine theoretische Diskussion noch nicht geeignet. Wendet man hingegen auf seine Meßergebnisse Ähnlichkeitsbetrachtungen an, so lassen sie sich wesentlich übersichtlicher darstellen und in einigen wenigen Aussagen zusammenfassen. Dies geschieht in Abschnitt II dieser Arbeit, wo überdies auch auf die Messungen von PENNING und vom Verfasser eingegangen wird. Dieser Abschnitt enthält damit die experimentelle Grundlage für die spätere theoretische Diskussion.

Eine befriedigende Theorie der Erscheinungen existiert noch nicht. Es sind zwar Überlegungen angestellt worden [1], die von der Verkürzung der freien Fallhöhe des Elektrons durch ein transversales Magnetfeld ausgehen. Diese Verkürzung der freien Fallhöhe wird als scheinbare Erhöhung des Druckes aufgefaßt. Es wäre danach zu erwarten, daß der Einfluß eines transversalen Magnetfeldes auf die Zündspannung der gleiche ist wie der einer Erhöhung von pd unter Berücksichtigung eines gewissen Umrechnungsfaktors. Diese Vorstellung führt aber, wie wir in Abschnitt III zeigen werden, zu Folgerungen, die mit der Erfahrung nicht im Einklang stehen.

Der Grund für das Versagen dieser Betrachtungsweise ist offenbar folgender: Die Zahl a der Ionisierungsakte pro cm Weg in Richtung des elektrischen Feldes ist nicht nur eine Funktion der mittleren freien Fallhöhe der Elektronen, sondern sie hängt auch wesentlich davon ab, welchem Verteilungsgesetz die freien Fallhöhen unterliegen. Nun berücksichtigt aber die obenerwähnte Vorstellung lediglich die Änderung der mittleren freien Fallhöhe durch das transversale Magnetfeld, nicht aber die grundsätzlich existierende Änderung des Verteilungsgesetzes selbst. Daß in Wirklichkeit aber auch das Verteilungsgesetz bei Anwesenheit eines transversalen Magnetfeldes ein ganz *anderes* wird, zeigt schon folgende einfache Überlegung: Ohne Magnetfeld sind die freien Fallhöhen entsprechend dem CLAUDIUSschen Verteilungsgesetz auf Werte zwischen null und unendlich verteilt. Unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes hingegen ist die maximale freie Fallhöhe endlich, und zwar gleich dem Rollkreisdurchmesser der Zykloidenbahn des Elektrons. Es genügt also nicht, die durch das Magnetfeld modifizierte mittlere freie Fallhöhe in das CLAUDIUSsche Verteilungsgesetz einzuführen, um die Größe a zu berechnen.

Bei einer theoretischen Behandlung der besprochenen Erscheinungen wird man vielmehr in der Weise vorgehen müssen, daß man sowohl das dem vorliegenden Fall entsprechende *Verteilungsgesetz der freien Fallhöhen* der Elektronen wie auch den Wert der *mittleren freien Fallhöhe* ermittelt. Die mittlere freie Fallhöhe ist zwar schon von KUGLER, OLLENDORFF und ROGGENDORF [6] abgeleitet worden, nicht aber das Verteilungsgesetz, so daß ein Zurückgreifen auf die Ausführungen dieser Autoren für uns keine Ersparnis an Rechenaufwand bedeuten würde. Aus den beiden Ausdrücken für das Verteilungsgesetz und die mittlere freie Fallhöhe ergibt sich dann nach einem bekannten Ansatz der Wert der Ionisierungszahl α . Diese Rechnung führen wir in Abschnitt III der Arbeit durch.

Die so ermittelte Ionisierungszahl α führen wir in die TOWNSENDSche Zünd- und Stationaritätsbedingung

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1 \quad (1)$$

ein. Diese Gleichung ist der adäquate Ausdruck für die TOWNSENDSche Vorstellung des Lawinenaufbaues der Entladung, welche wir somit auch zur Grundlage unserer Betrachtung machen. Die Zündbedingung besagt bekanntlich, daß eine Entladung dann und nur dann zündet, bzw. stationär brennt, wenn ein an der Kathode startendes Elektron auf seinem Wege zur Anode durch Stoßionisation (α -Prozeß) gerade soviel positive Ionen erzeugt, daß diese bei ihrem Aufprall auf die Kathode wiederum *ein* Elektron befreien (γ -Prozeß). Wie schon erwähnt, ist α die Zahl der Ionisierungsakte eines Elektrons pro cm Weg in Feldrichtung. γ ist die Zahl der Elektronen, die pro Ion, das die Kathode erreicht, durch Stoß ausgelöst und für den Lawinenaufbau wirksam werden. Von γ nehmen wir zunächst an, es sei konstant und gleich dem für magnetfeldfreie Entladungen gültigen Wert. Da die Berechnung der Ionisierungszahl α diese als abhängig von den verschiedenen Versuchsparametern ergibt, können wir aus Bedingung (1) Gleichungen herleiten, die dem Beobachtungsmaterial angepaßt sind und daher an der Erfahrung geprüft werden können. Dies geschieht in Abschnitt IV der vorliegenden Arbeit. Zu einer quantitativen Prüfung der Theorie eignen sich, wie oben begründet, nur die Messungen von WEHRLI. Die bei sehr niedrigen Drucken ausgeführten Messungen von PENNING und vom Verfasser, die sich in charakteristischer und theoretisch deutbarer Weise von den Messungen bei höheren Drucken unterscheiden, können hingegen aus den oben genannten Gründen nur zu einer qualitativen Prüfung der Theorie herangezogen werden.

II. Versuchsanordnung und Meßergebnisse.

1. Versuchsanordnung von Wehrli.

Die Entladungsstrecke (Abb. 1) wird durch den Raum zwischen zwei koaxialen Messingzylindern gebildet. Seitlich ist der Entladungsraum, dessen Breite 1,2 cm, bzw. 1,7 cm beträgt, durch Distanzstücke aus Ebonit abgeschlossen. Wir verwenden von den WEHRLISchen

Messungen diejenigen, bei denen die Elektrodenabstände 0,2, bzw. 0,5 cm sind, da in diesen beiden Fällen das Verhältnis der Zylinderdurchmesser das gleiche ist, nämlich 1,18. Der Einfluß unterschiedlicher Polarität der Elektroden auf die Zündspannung ist bei diesem Durchmesser Verhältnis noch so gering (etwa 1%), daß man das elektrische Feld als praktisch homogen ansehen kann. Die Inhomogenität des magnetischen Feldes innerhalb des Entladungsraumes ist ebenfalls gering. Sie wird mit maximal 5% angegeben. Als Füllgas wird Luft verwendet, die von Wasserdampf und Kohlensäure befreit ist.

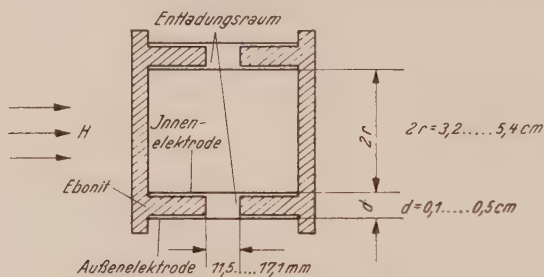


Abb. 1. Versuchsanordnung von WEHRLI.

2. Kritischer Wert $(pd)_k$.

Den bekannten Verlauf der Zündspannung ohne Magnetfeld in Abhängigkeit von pd im Gebiet des Zündspannungsminimums, in dem die WEHRLISCHEN Messungen liegen, zeigt Abb. 2. Bei kleinen Werten pd (z. B. 0,25 Torr cm, Abb. 3) bewirkt ein transversales Magnetfeld eine Erniedrigung der Zündspannung, bei hohen Werten pd (z. B. 3 Torr cm, Abb. 3) hingegen eine Erhöhung der Zündspannung. Zwischen den genannten Werten muß ein kritischer Wert $(pd)_k$ fehlenden Magnetfeld-einflusses liegen. Die Durchmusterung der WEHRLISCHEN Tabellen ergibt, daß er zwischen 1,0 und 1,27 Torr cm liegt. Eine genauere Bestimmung ist nicht möglich, da der Magnetfeldeinfluß in der Nähe von $(pd)_k$ gering ist. Insbesondere aber sei hervorgehoben, daß dieser kritische Wert deutlich von dem Wert $(pd)_{min} = 0,7$ Torr cm unterschieden ist, bei dem die Zündspannung ohne Magnetfeld ihr Minimum erreicht (Abb. 1).

3. Ähnlichkeitsgesetz.

Man findet folgendes Ähnlichkeitsgesetz: Bei gegebenem pd ist die Zündspannung eine Funktion nur des Produktes magnetische Feldstärke $H \times$ Elektrodenabstand d (Abb. 3). Die Zündspannung unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes läßt sich daher auch in einem einzigen, allerdings räumlichen Koordinatensystem darstellen, wobei die beiden unabhängigen Variablen pd und Hd sind:

$$U = F(pd, Hd).$$

4. Zündkennlinien für pd größer als $(pd)_k$.

Die Kurven in Abb. 3, die den Zusammenhang zwischen Zündspannung und Hd bei gegebenem pd darstellen, nennen wir *Zündkennlinien*. Ihr Verlauf ist unterschiedlich, je nachdem ob pd kleiner oder größer als der kritische Wert $(pd)_k$ ist. Ist pd größer als $(pd)_k$, so steigt die Zündspannung mit wachsendem Hd monoton an: Man findet das Gesetz: $U - U_0 = \text{const. } (Hd)^2$ (Abb. 3, $pd = 2,8$ und $3,0$ Torr cm). Der Einfluß des Magnetfeldes ist hier wesentlich geringer als in dem Fall, den wir nun besprechen wollen.

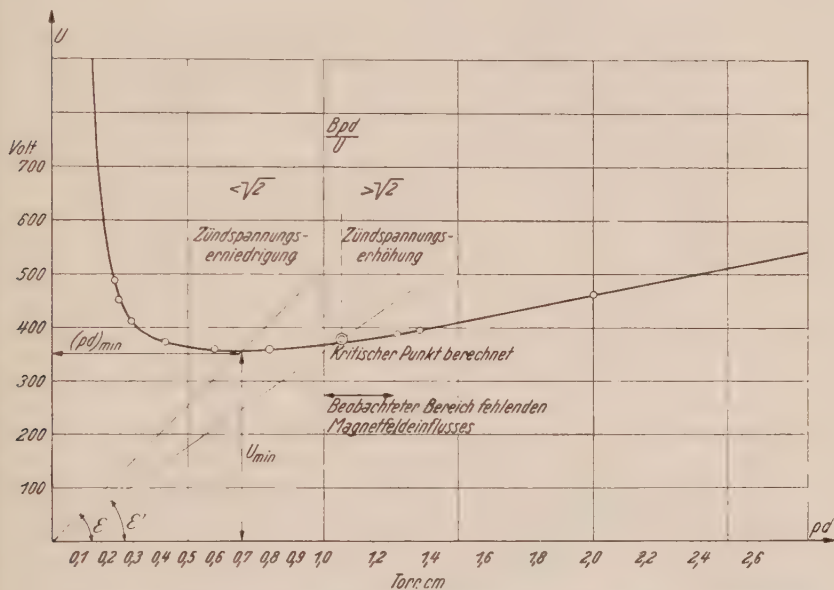


Abb. 2. Zündspannung in Luft ohne Magnetfeld in Abhängigkeit von pd im Gebiet des Zündspannungs-minimums nach WEHRLI.

5. Zündkennlinien für pd kleiner als $(pd)_k$, jedoch nicht kleiner als 10^{-2} Torr cm.

Ist pd kleiner als der kritische Wert, so nimmt die Zündspannung mit wachsendem Magnetfeld zunächst ab, durchläuft ein Minimum und steigt dann wieder an (Abb. 3). Den Anfangsverlauf einer solchen Kennlinie zeigt in genauerer Darstellung Abb. 4 a, aus der man überdies entnimmt, daß der Wert der Zündspannung nicht von der Richtung des Magnetfeldes abhängt. Trägt man die Zündspannungswerte aus Abb. 4 a als Funktion von $(Hd)^2$ auf, so ergibt sich die Gerade in Abb. 4 b. Für den Anfangsverlauf der Zündkennlinie gilt daher $U_0 - U = \text{const. } (Hd)^2$. Wie die Betrachtung der Zündkennlinien bei verschiedenen $pd < (pd)_k$ in Abb. 5 lehrt, ist die prozentuale Zündspannungssenkung bei kleinen Hd umso größer, je kleiner pd ist. Das Minimum der Zündlinien steigt

mit abnehmendem pd in geringem Maße an. Allgemein ist festzustellen, daß eine Abnahme von pd eine Verschiebung der Zündkennlinien im Kennlinienfeld in Richtung größerer U - und größerer Hd -Werte bewirkt.

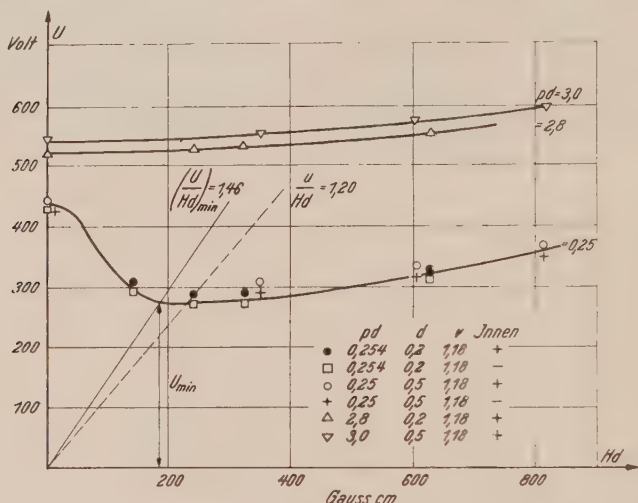


Abb. 3. Zündkennlinien für Luft bei $pd = 0,25, 2,8$ und $3,0$ Torr cm.

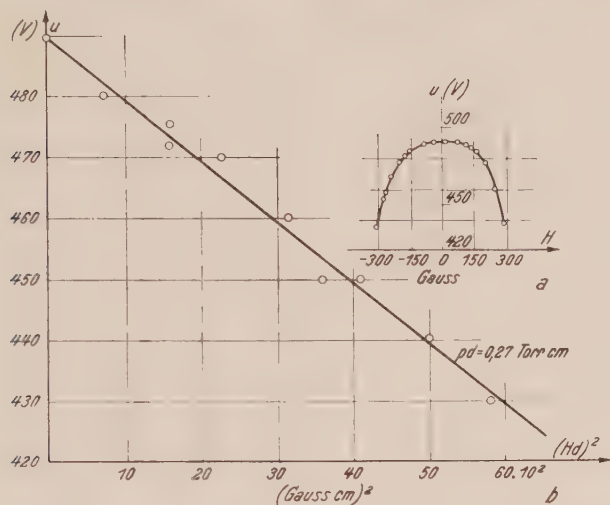
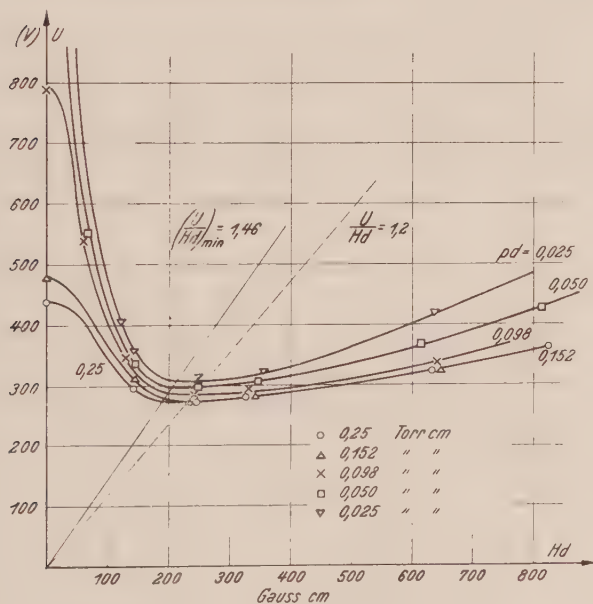
6. Tatsachen, die das Versagen der bisherigen theoretischen Deutung erkennen lassen.

Es ist bemerkenswert, daß das Minimum der Zündspannung bei Anwesenheit eines Magnetfeldes wesentlich niedriger sein kann als das Minimum der Zündspannung ohne Magnetfeld. So erreicht z. B. die Kennlinie für $pd = 0,25$ Torr cm in Abb. 3 ein Minimum von 278 V, während die minimale Zündspannung ohne Magnetfeld nach Abb. 1 360 V beträgt.

Wäre nun die in der Einleitung erwähnte bisherige Deutung des Magnetfeldeinflusses im Sinne nur einer Druckerhöhung richtig, so müßten die Zündkennlinien etwa folgenden Verlauf haben: Ist pd kleiner als der Wert $(pd)_{min}$, bei dem die Zündspannung ohne Magnetfeld ihr Minimum erreicht, so würde die Zündspannung mit wachsendem Magnetfeld zunächst absinken bis auf genau den Minimalwert, den die Zündspannungskurve Abb. 1 ohne Magnetfeld erreicht, und anschließend wieder ansteigen. Dieser Minimalwert wäre aber 360 V, während er in Wirklichkeit, wie oben erwähnt, 278 V beträgt. Ist andererseits pd größer als $(pd)_{min}$, so wäre ein monotonies Anwachsen der Zündspannung mit steigendem Magnetfeld zu erwarten. Daraus folgt weiter, daß der kritische Wert $(pd)_k$ identisch mit $(pd)_{min}$ sein müßte. Auch diese Folgerung ist nach Abschnitt II, 2, im Widerspruch mit der Erfahrung.

7. Zündkennlinien bei niedrigen Drucken ($pd < 10^{-2}$ Torr cm).

Die Zündkennlinien bei niedrigen Drucken (Abb. 6) haben einen ganz anderen Verlauf als die bisher besprochenen. Die Übersicht über die hier vorliegenden Verhältnisse wird wesentlich dadurch erleichtert,

Abb. 4. Anfangsverlauf der Zündkennlinie für Luft bei $pd = 0,27$ Torr cm.Abb. 5. Zündkennlinien für Luft im pd -Bereich von 0,25 bis 0,025 Torr cm.

daß sich auch im Gebiet niedriger Drücke ein *Ähnlichkeitsgesetz* als gültig erweist: Die Zündspannung ist bei gegebenem Druck nur von Hd abhängig. In diesem Fall ist d der lichte Abstand der konaxialen Zylinder². Es muß bei der Anwendung dieses Gesetzes auf eine wesentliche Voraussetzung geachtet werden: Die Befreiung der Elektronen durch Ionenstoß muß an *homologen Stellen der Kathoden und mit gleicher Ausbeute* erfolgen. Dieses Ähnlichkeitsgesetz wird durch die Zündkennlinien *B* und *C* in Abb. 6 bestätigt. Die Kurve *B* für Argon bei

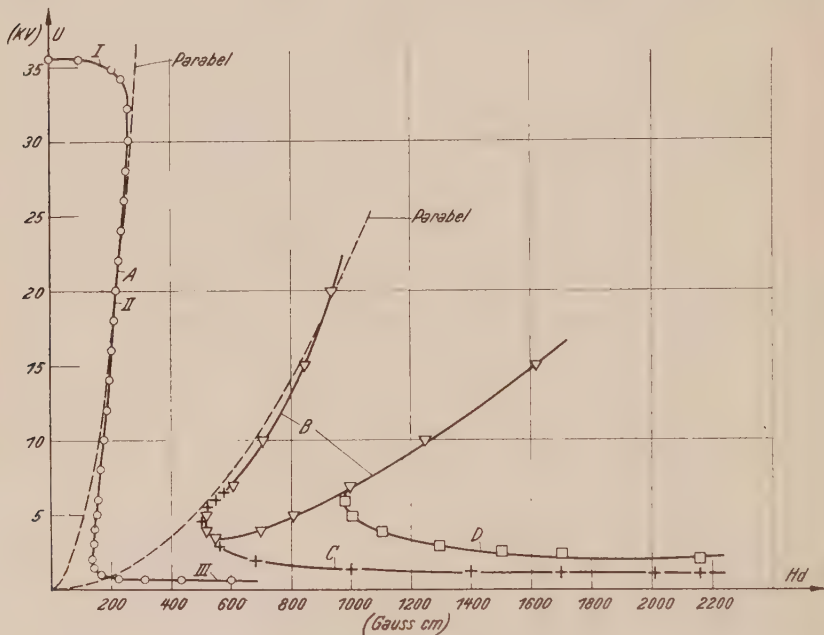


Abb. 6. Zündkennlinien im Gebiet niedriger Drücke.

$1 \cdot 10^{-5}$ Torr wurde aus Messungen von PENNING [4] durch Umrechnung der von ihm angegebenen Werte $U = f(H)$ auf $U = f(Hd)$ gewonnen; d ist dabei 1,7 cm. Die Zündkennlinie *C* für Argon bei $0,8 \cdot 10^{-5}$ Torr³ wurde vom Verfasser bei $d = 1,1$ cm gemessen. In dem steilabfallenden Teil hoher U -Werte fallen beide Kurven sehr gut zusammen. Aus der Tatsache, daß das Ähnlichkeitsgesetz in diesem Gebiet also erfüllt ist, ist zu schließen, daß die Elektronenbefreiung tatsächlich an homo-

² Die theoretische Betrachtung ergibt statt d eine Funktion der Zylinder-radien, die im Fall der vorliegenden Experimente ungefähr gleich der Radiendifferenz ist.

³ Der durch den Unterschied der zu *B* und *C* gehörigen Drücke hervorgerufene Unterschied hinsichtlich Hd beträgt nur 20 Gauß cm bei 500 Gauß, also 4%.

logen Stellen und in gleicher Ausbeute erfolgt. Es handelt sich in beiden Fällen um einen Elektronenausritt aus der Zylindermantelfläche der Kathode (äußerer Zylinder), wie wir an späterer Stelle zeigen werden.

Anders liegen die Verhältnisse von dem Punkt der Zündkennlinien bei 3500 V ab, wo die Kurve *B* ein Minimum durchläuft und dann wieder steil ansteigt, während die Kurve *C* weiter abfällt und erst bei 1200 V ihr Minimum erreicht. In diesem Fall kann man aus dem Nichterfülltsein des Ähnlichkeitsgesetzes auf einen unterschiedlichen Vorgang der Elektronennachlieferung schließen. Es dürften hier die seitlichen Begrenzungswände des zylindrischen Elektrodensystems, die als Kathode mitwirken, eine Rolle spielen. Wir kommen darauf in einer folgenden Arbeit zurück, in der auch über die experimentellen Einzelheiten der vom Verfasser ausgeführten Versuche berichtet wird.

Kurve	Gas- füllung	Druck Torr	Kathoden- durchmesser cm	Anodendurch- messer cm	Länge der Zylinder cm
<i>A</i>	Hg	$2 \cdot 10^{-3}$	1,7	0,3	5,0
<i>B</i> ¹	Ar	$1 \cdot 10^{-5}$	5,4	2,0	23
<i>C</i>	Ar	$8 \cdot 10^{-6}$	2,4	0,2	4,0
<i>D</i>	Ar	$1,5 \cdot 10^{-8}$	2,4	0,2	4,0

¹ Nach Messungen von PENNING ([4], ibid. Abb. 9).

Kurve *A*, Abb. 6, zeigt den vollständigen Verlauf einer Zündkennlinie bei Hg-Dampf von $2 \cdot 10^{-3}$ Torr, die an einem besonders spannungsfest gebauten Rohr gemessen wurde, so daß auch der Anfangsverlauf bei 35 kV in der Nähe von $H = 0$ erhalten werden konnte. Dieser Anfangsverlauf (*I*) ist ähnlich demjenigen, der auch bei höheren Drucken in Abb. 3 beobachtet wird. An *I* anschließend geht die Zündkennlinie in einen Teil *II* über, bei dem mit absinkender Spannung auch das Magnetfeld abnimmt. Schließlich geht die Zündkennlinie über ein Minimum in einen nur *schwach* ansteigenden etwa geradlinigen Teil *III* über. Wie Kurve *B* zeigt, kann dieser dritte Teil der Zündkennlinie allerdings auch *steil* ansteigend sein. Kurve *D* zeigt endlich die Zündkennlinie für Argon bei $1,5 \cdot 10^{-8}$ Torr im Gebiet des Zündspannungsminimums, das bei 2200 V liegt. Diese Zündkennlinie ist mit dem gleichen Rohr gemessen wie Kurve *C*.

Die Zündkennlinien im Gebiet niedriger Drucke haben folgende Merkmale, auf die PENNING bereits hinwies und die wir entsprechend dem Ähnlichkeitsgesetz wie folgt formulieren:

a) Der steil verlaufende Teil *II* der Zündkennlinie ist ungefähr parabelförmig: $U \sim (Hd)^2$.

b) Es existiert eine minimale Zündspannung U_{min} , die bei gegebener Entladungsstrecke mit abnehmendem Druck steigt.

c) Es existiert ein minimales Magnetfeld — genauer gesagt $(Hd)_{\min}$ — unterhalb dessen keine magnetische Zündung erfolgt, es sei denn bei sehr hohen Spannungen auf dem Kurvenstück I . $(Hd)_{\min}$ steigt bei gegebener Entladungsstrecke ebenfalls mit abnehmendem Druck.

d) In einem gewissen Hd -Bereich ist die Zündspannung *zweideutig* bzw., wenn man den Anfangsverlauf Kurvenstück I hinzunimmt, sogar *dreideutig*.

III. Ionisierungszahl α beim Vorhandensein eines zum homogenen elektrischen Feld transversalen homogenen Magnetfeldes.

1. Bewegungsvorgang der Elektronen.

Ein die Kathode mit der Anfangsgeschwindigkeit null verlassendes Elektron wird unter der gleichzeitigen Wirkung des elektrischen und des dazu senkrecht stehenden magnetischen Feldes bekanntlich auf einer Zykloide beschleunigt (Abb. 7). Erfährt das Elektron auf dem Zykloidenbogen keinen Zusammenstoß mit einem Gasatom, so gelangt es zur Kathode zurück. Ist die Kathodenoberfläche ideal glatt, so wird das Elektron mit einer Wahrscheinlichkeit von nahezu 1 von der Kathode wieder aufgenommen. Es geht für den Lawinenaufbau verloren. Hat die Oberfläche Unebenheiten, so hat das Elektron, worauf PENNING [4] hingewiesen hat, eine gewisse Wahrscheinlichkeit reflektiert zu werden, wenn die Höhe der Unebenheiten vergleichbar wird mit dem Abstand, bei dem die Potentialdifferenz multipliziert mit der Elementarladung gleich der Austrittsenergie der Elektronen ist. Die mittlere Austrittsenergie ist aber 3 eV [7], so daß z. B. bei $E = 1000$ V/cm Unebenheiten von 30μ eine Reflexion bewirken können.

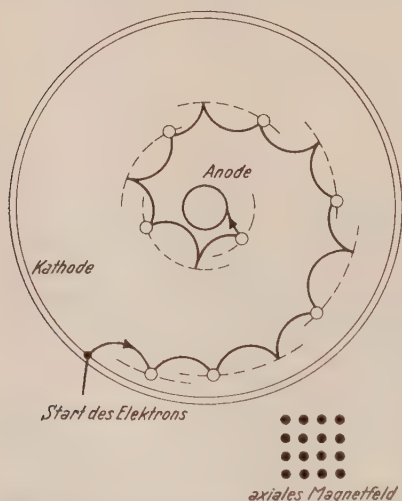


Abb. 7. Bewegungsvorgang des Elektrons im zylindrischen Elektrodensystem. Richtung des Magnetfeldes senkrecht zur Zeichenebene.

Bei nicht polierten Elektroden sind solche Unebenheiten möglich. Wird das Elektron reflektiert, so beginnt es einen neuen Zykloidenbogen zu beschreiben. Erleidet es nun einen Zusammenstoß mit einem Gasatom, bei dem es einen Energiebetrag verliert, der größer als seine Austrittsenergie ist, so kann es nicht mehr zur Kathode zurückkehren. Es bleibt frei und ist imstande, den Lawinenaufbau einzuleiten. Das Elektron bewegt sich nun auf Zykloidenbögen um die Achse des

zylindrischen Rohres. Nach Zurücklegen einer gewissen Strecke, die im Mittel gleich der mittleren freien Weglänge ist, stößt es wieder auf ein Gasatom, wird abgebremst und beginnt in einem geringeren Abstand von der Anode wiederum die Bewegung auf Zykloidenbögen um die Achse usw., bis es schließlich zur Anode gelangt.

Selbstverständlich spielt sich der ganze Bewegungsvorgang nicht, wie in Abb. 7 gezeichnet, in einer Ebene ab, sondern es entstehen als Folge der einzelnen Stoßvorgänge auch Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Zeichenebene, das heißt in axialer Richtung, auf die weder das elektrische noch das magnetische Feld einwirken. Wird der Druck so niedrig, daß die mittlere freie Weglänge vergleichbar mit der Breite b (Abb. 1) der Elektroden wird, so können infolge der axialen Geschwindigkeitskomponenten erhebliche Trägerverluste entstehen, wenn der Entladungsraum nicht seitlich abgeschlossen ist.

2. Rückführungsgröße γ .

Ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen größer als die Länge eines Zykloidenbogens, so wird nur ein Bruchteil κ der durch Ionenstoß ausgelösten Elektronen freibleiben und für den Lawinenaufbau wirksam werden [4]. Man kann diese Tatsache so beschreiben, daß die Zahl der pro Ion befreiten und auch freibleibenden Elektronen, die ohne Magnetfeld den Wert γ hat, unter der Einwirkung des Magnetfeldes auf den Wert $\kappa\gamma$ vermindert wird. Den Einfluß dieser zahlenmäßig schwer erfaßbaren Größe κ brauchen wir aber solange nicht zu berücksichtigen, wie die mittlere freie Weglänge der Elektronen die Länge des Zykloidenbogens nicht überschreitet. Ist diese Bedingung erfüllt, so können wir die Größe γ als Konstante annehmen, da sie sich auch bei der magnetfeldfreien Entladung innerhalb des E/p -Bereiches, in dem die WEHRLischen Messungen liegen, praktisch nicht ändert. Wir nehmen daher $\gamma = \text{const.}$ an und haben bei der Diskussion der Meßergebnisse zu prüfen, inwieweit diese Annahme gerechtfertigt ist.

3. Annahmen zur Berechnung der Ionisierungszahl.

Wir machen folgende Annahmen:

a) Das elektrische Feld E und das dazu transversale Magnetfeld H sind homogen.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons bei jedem Freiflug ist null. Das Elektron gibt also seine Energie bei jedem Zusammenstoß mit einem Gasatom vollkommen ab. Es kommen nur unelastische Stöße vor.

c) Jeder Stoß, bei dem das Elektron eine zur Ionisierung ausreichende Energie besitzt, führt auch wirklich zur Ionisierung des Gasatoms. Die Ionisierungswahrscheinlichkeit ist 1.

d) Für die gekrümmte Bahn des Elektrons gilt das CLAUDIUSsche Gesetz der Weglängenverteilung. Die mittlere freie Weglänge λ ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Elektrons.

e) Die Bewegung der Gasmoleküle ist zu vernachlässigen. Die Gasmoleküle sind praktisch ruhend.

Wie schon eingangs erwähnt, ist die Ionisierungszahl α definiert als die Zahl der von einem Elektron pro cm Weg in Richtung des elektrischen Feldes durch Stoß erzeugten Ionenpaare. Da das Elektron seinen Freiflug voraussetzungsgemäß mit der Geschwindigkeit null beginnt, kann es nur ionisieren, wenn es aus dem elektrischen Feld eine zur Ionisierung ausreichende Energie aufgenommen hat, das heißt wenn die Fallhöhe

$$x \geq \frac{V_i}{E}$$

ist. V_i = Ionisierungsspannung des Gasmoleküls. Bedeutet $\bar{x}$ die mittlere freie Fallhöhe, so enthält die Weglängeneinheit im Mittel $1/\bar{x}$ freie Fallhöhen. Der Bruchteil aller Fallhöhen, die größer als x sind, bezogen auf alle überhaupt vorkommenden sei $n(x)/n_0$. Dann ist die Zahl der freien Fallhöhen pro cm Weg, die größer als x sind und bei denen das Elektron eine zur Ionisierung ausreichende Geschwindigkeit hat,

$$\alpha = \frac{1}{\bar{x}} \cdot \frac{n(x)}{n_0}, \quad x = \frac{V_i}{E}. \quad (2)$$

Die Annahmen b und c , die auch TOWNSEND bei der Ableitung der Ionisierungszahl für den magnetfeldfreien Fall macht, schließen erhebliche Fehlerquellen in sich ein. Man muß bedenken, daß die Ionisierungswahrscheinlichkeit im Maximum den Wert 0,3 hat, das heißt, daß im energetisch günstigsten Fall nur jeder dritte Stoß zur Ionisierung führt. Diese Tatsache, daß also die Annahme c in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, muß die Berechnung von α zu groß ausfallen lassen. Andererseits wird die Tatsache, daß die Annahme b in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, die Berechnung von α zu klein ausfallen lassen, weil infolge der in Wirklichkeit von null verschiedenen Anfangsgeschwindigkeit eine größere Anzahl von Elektronen eine zur Ionisierung ausreichende Energie hat, als wenn die Anfangsgeschwindigkeit null ist. Es ist daher möglich, daß sich beide Fehler zum Teil kompensieren werden. Jedenfalls ist es bei der Theorie der Ionisierungszahl im magnetfeldfreien Fall so. Dort stimmen die experimentell ermittelten Koeffizienten A und B bis auf einen Faktor von etwa 2 mit den theoretisch zu erwartenden Werten überein. Wie die Verhältnisse in unserem Fall liegen, wird der später zu ziehende Vergleich zwischen Theorie und Experiment ergeben müssen.

4. Verteilungsgesetz der freien Fallhöhen.

Die Bahn des Elektrons ist eine Zykloide, die durch den Rollkreis vom Durchmesser D erzeugt wird, der sich auf der y -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω abwälzt (Abb. 8) [9]:

$$\left. \begin{aligned} D &= 2 \cdot 10^9 \frac{m}{e} \frac{E}{H^2} = 11,35 \frac{E}{H^2} \\ w &= 0,1 \frac{e}{m} H = 1,77 \cdot 10^7 \cdot H \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(E in V/cm, H in Gauß, D in cm, w in sec^{-1})

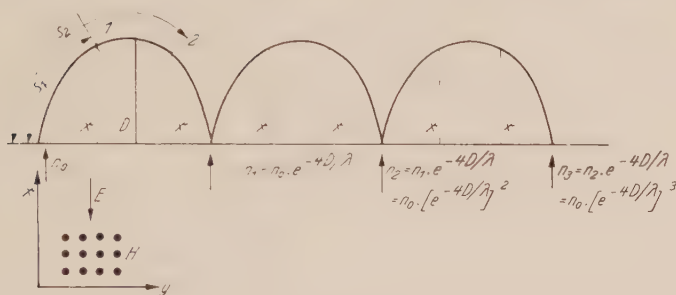


Abb. 8. Zur Berechnung des Verteilungsgesetzes der freien Fallhöhen.

e und m sind Ladung und Masse des Elektrons. Die Bogenlänge der Zykloide, die zu der Höhe x gehört, ist auf dem ansteigenden Ast

$$s_1 = 2 D \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{D}} \right)$$

und auf dem abfallenden Ast

$$s_2 = 2 D \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{D}} \right).$$

Von n_0 im Nullpunkt gleichzeitig startenden Elektronen haben nach dem CLAUSIUSschen Gesetz nach Zurücklegen des Bogens s_1

$$n_{s_1} = n_0 e^{-\frac{s_1}{\lambda}}.$$

Elektronen noch keinen Zusammenstoß erlebt. Im Punkt 2 sind von n_0 Elektronen nur noch

$$n_{s_2} = n_0 e^{-\frac{s_2}{\lambda}}.$$

Elektronen übrig, die noch nicht mit Gasmolekülen zusammengestoßen sind. Zwischen den Punkten 1 und 2 in der ersten Zykloide stoßen also

$$n_{x_1} = n_{s_1} - n_{s_2} = 2 n_0 e^{-\frac{2 D}{\lambda}} \sin \frac{2 D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}$$

Elektronen mit einer Energie, die größer als $e E x$ ist. Am Ende der ersten Zykloide sind noch

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{4 D}{\lambda}}$$

Elektronen vorhanden ($4D =$ Bogenlänge der ganzen Zykloide). Die übrigen Elektronen sind durch Stoß aus dem Schwarm ausgeschieden. Mit dieser Anzahl n_1 beginnt die Bewegung auf der zweiten Zykloide. Diese Zahl spielt in der zweiten Zykloide die gleiche Rolle wie n_0 in der ersten. Folglich ist die Zahl der Elektronen, die in der zweiten Zykloide eine Fallhöhe $\geq x$ erreichen

$$n_{x_2} = n_{x_1} e^{-\frac{4D}{\lambda}} = e^{-\frac{4D}{\lambda}} \cdot 2 n_0 e^{-\frac{2D}{\lambda}} \sin \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}.$$

Zu Beginn der dritten Zykloide sind noch

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{4D}{\lambda}} = n_0 \left[e^{-\frac{4D}{\lambda}} \right]^2$$

Elektronen vorhanden und es erreichen in dieser Zykloide

$$n_{x_3} = \left[e^{-\frac{4D}{\lambda}} \right]^2 \cdot 2 n_0 e^{-\frac{2D}{\lambda}} \sin \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}$$

Elektronen eine Fallhöhe $\geq x$. Summiert man über alle Zykloidenbögen, so erhält man

$$\begin{aligned} n(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_{x_i} = 2 n_0 e^{-\frac{2D}{\lambda}} \left[1 + e^{-\frac{4D}{\lambda}} + \left(e^{-\frac{4D}{\lambda}} \right)^2 + \dots \right] \sin \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck ist eine geometrische Reihe. Man erhält schließlich

$$\frac{n(x)}{n_0} = \frac{\sin \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}}{\sin \frac{2D}{\lambda}} \quad (4)$$

als Gesetz der Fallhöhenverteilung unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes.

Gl. (4) geht für verschwindendes Magnetfeld ($2D \gg \lambda$, $D \gg x$) in das CLAUSIUSsche Verteilungsgesetz über, da für große Argumente y

$$2 \sin y = e^y \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \frac{x}{D}} = 1 - \frac{x}{2D} \quad \text{ist:}$$

$$\frac{n(x)}{n_0} = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (4a)$$

Als nächste Näherung erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{x}{D}} &= 1 - \frac{x}{2D} - \frac{x^2}{8D^2} \\ \frac{n(x)}{n_0} &= e^{-\frac{x}{\lambda}} \left[1 + \frac{x}{4D} \right], \end{aligned} \quad (4b)$$

die praktisch schon für $2D/\lambda > 2$ zu verwenden ist, wenn man einen Fehler von 10% zuläßt.

Ist $2D \ll \lambda$, so ergibt sich wegen $\sin y = y$

$$\frac{n(x)}{n_0} = \sqrt{1 - \frac{x}{D}}. \quad (4c)$$

Diese Beziehung gilt praktisch schon bei $4D/\lambda \approx 1$, falls man 10% Fehler zuläßt.

Abb. 9 zeigt, wie die freien Fallhöhen gemäß Gl. (4) bei verschiedenen Parametern $2D/\lambda$ auf die Werte zwischen $x=0$ und $x=D$ verteilt sind. Bei großen Werten $2D/\lambda$, die durch hohen Druck, große elektrische Feldstärke und kleine magnetische Feldstärke realisiert werden, ergibt sich ein Verlauf, der einem exponentiellen Abfall nahekommt. Bei Werten $2D/\lambda \rightarrow 0$, die durch niedrigen Druck, kleine elektrische und große magnetische Feldstärke verwirklicht werden, erhält man das Wurzelgesetz Gl. (4c). Es sei hervorgehoben, daß in dieses Wurzelgesetz der Druck nicht mehr eingeht. Bei kleinen $2D/\lambda$ ist somit die Verteilung der freien Fallhöhen unabhängig vom Druck. Anschaulich bedeutet das Wurzelgesetz folgendes: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron eine Fallhöhe größer als x erreicht, ist bei sehr großen freien Weglängen gleich dem Verhältnis der Länge des Zykloidenbogens, die oberhalb der Fallhöhe x liegt, zur gesamten Zykloidenbogenlänge ($4D \sqrt{1 - x/D} : 4D$).

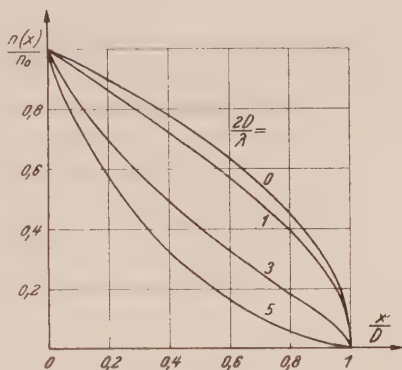


Abb. 9. Verteilungsgesetz der freien Fallhöhen bei verschiedenen Werten $2D/\lambda$.

5. Mittlere freie Fallhöhe.

Die Zahl der Elektronen, die zwischen x und $x + dx$ stoßen und damit aus dem Schwarm ausscheiden, ist

$$-\frac{dn(x)}{dx} dx = -\frac{n_0}{\sin \frac{2D}{\lambda}} \frac{\cos \frac{\lambda}{2D} \sqrt{1 - \frac{x}{D}}}{\lambda \sqrt{1 - \frac{x}{D}}}$$

Die mittlere freie Fallhöhe ist dann

$$\bar{x} = \int_0^D x \frac{dn(x)}{n_0} = \frac{-1}{\lambda \sin \frac{2D}{\lambda}} \int_0^D x \cos \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{x}{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{D}}} dx$$

Die Substitution ist $u = 2D/\lambda \cdot \sqrt{1 - x/D}$ führt nach elementarer Rechnung auf

$$\frac{\bar{x}}{\lambda} = \text{Cotg} \frac{2D}{\lambda} - \frac{\lambda}{2D}. \quad (5)$$

Diese Gleichung⁴ besagt, daß die mittlere freie Fallhöhe $\bar{x}$ mit abnehmendem Rollkreisdurchmesser von dem gaskinetischen Wert λ nach einer LANGEVINSchen Funktion abfällt und dem Wert Null zustrebt. Den Verlauf zeigt Abb. 10. Da diese Funktion mathematisch schwierig zu handhaben ist, ersetzen wir sie je nach der Größe des Arguments durch eine der zwei folgenden Näherungen:

$$\frac{\bar{x}}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{2D} \quad \text{für} \quad 1,9 \leq \frac{2D}{\lambda} \leq \infty \quad (5a)$$

$$\frac{\bar{x}}{\lambda} = \frac{2D}{3\lambda} \quad \text{oder} \quad \bar{x} = \frac{2}{3}D \quad \text{für} \quad 0 \leq \frac{2D}{\lambda} \leq 1,5 \quad (5b)$$

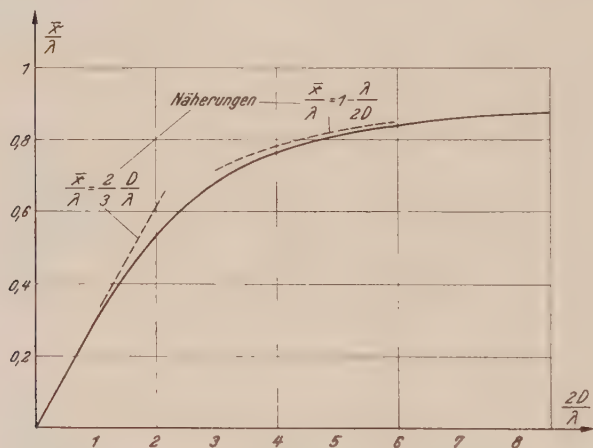


Abb. 10. Mittlere freie Fallhöhe der Elektronen in Abhängigkeit von $2D/\lambda$.

Innerhalb der angegebenen Grenzen beträgt die maximale Abweichung von Gl. (5) 10%. Es ist wiederum bemerkenswert, daß bei kleinen $2D/\lambda$ die mittlere freie Fallhöhe unabhängig vom Druck und nur noch abhängig vom Rollkreisdurchmesser, das heißt von E und H ist. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß die Fallhöhenverteilung bei kleinen $2D/\lambda$, das heißt also insbesondere bei niedrigen Drucken, unabhängig vom Druck ist.

Unmittelbar anschaulich wird die Erniedrigung der mittleren freien Fallhöhe durch ein transversales Magnetfeld durch einen Versuch

⁴ Der Ausdruck (5) ist identisch mit dem von KUGLER, OLLENDORFF und ROGGENDORF [6] abgeleiteten.

von GÜNTHERSCHULZE [8], der die Abnahme der Länge des Kathodendunkelraumes einer normalen Glimmentladung mit wachsendem Magnetfeld zeigt.

6. Ionisierungszahl α und Zündbedingung.

Setzen wir die Ausdrücke Gl. (4) und (5) in Gl. (2) ein, so erhalten wir den vollständigen Wert für die Ionisierungszahl α . Anstatt diesen Wert aufzuschreiben, geben wir den für unsere Zwecke geeigneteren Wert αd an, der die Zahl der ionisierenden Stöße eines Elektrons auf seinem Wege von der Kathode zur Anode bezeichnet. Berücksichtigen wir noch Gl. (1) und die Bedingung

$$x = \frac{V_i}{E}, \quad (6)$$

so erhalten wir

$$\alpha d = \frac{d}{\lambda \left(\cotg \frac{2D}{\lambda} - \frac{\lambda}{2D} \right)} \frac{\sin \frac{2D}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{V_i}{E D}}}{\sin \frac{2D}{\lambda}} = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (7)$$

Diese Gleichung stellt die gesuchte *Zündbedingung* der Entladungsstrecke unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes dar.

Wir prüfen, ob αd für verschwindende Magnetfelder in den TOWNSENDSchen Ausdruck übergeht. Mit $2D \gg \lambda$ und $x \ll D$ erhalten wir

$$\alpha d = \frac{d}{\lambda} e^{-\frac{V_i}{E \lambda}}.$$

Mit den Koeffizienten

$$A = \frac{1}{p \lambda} \quad (8)$$

und

$$B = A \cdot V_i \quad (9)$$

geht dieser Ausdruck in der Tat in die bekannte TOWNSENDSche Formel über

$$\alpha d = A p d e^{-\frac{B p}{E}} = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (10)$$

Physikalisch bedeutet A den Wirkungsquerschnitt der Gasatome gegenüber Elektronen beim Druck von 1 Torr.

IV. Berechnung der Zündkennlinien und Diskussion der Meßergebnisse.

1. Kritischer Wert $(pd)_k$.

Wir betrachten den Fall kleiner Magnetfelder und verwenden dementsprechend die für $2D \gg \lambda$ gültigen Näherungen Gl. (4 b) und (5 a), die wir in die Zündbedingung Gl. (7) einsetzen. Unter Berücksichtigung von Gln. (3), (6), (8) und (9) erhalten wir als Zündbedingung für den Fall kleiner Magnetfelder

$$\alpha d = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) = A p d \left(1 + \frac{(Hd)^2}{22,7 A p d U} \right) e^{-\frac{B p d}{U}} \left[1 + \frac{B (Hd)^2}{45,4 \cdot A U^2} \right]. \quad (11)$$

U ist dabei die Zündspannung bei vorhandenem Magnetfeld. Die Zahlenwerte 22,7 und 45,4 in dieser Gleichung bedeuten Vielfache von m/e entsprechend Gl. (3).

Der kritische Wert $(pd)_k$ ist gegeben durch die Bedingung

$$\frac{dU}{d(Hd)} = 0$$

bei von Null verschiedenem, aber kleinem H . Die Zündkennlinie ist bei kleinem Magnetfeld $H \neq 0$ steigend oder fallend, je nachdem ob

$$\frac{dU}{d(Hd)} > 0 \quad \text{oder} \quad < 0$$

ist. Da αd wegen der vorausgesetzten Konstanz von γ ebenfalls konstant ist, ist das vollständige Differential $d(\alpha d) = 0$ und wir erhalten

$$\frac{dU}{d(Hd)} = - \frac{\frac{\partial \alpha d}{\partial Hd}}{\frac{\partial \alpha d}{\partial U}}.$$

Die Durchführung dieser elementaren Rechnung ergibt:

a) Der kritische Wert $(pd)_k$ ist gegeben durch

$$\frac{B (pd)_k}{U_{0k}} = \sqrt{2}. \quad (12 a)$$

b) Der Anfangsverlauf der Zündkennlinie ist steigend oder fallend, je nachdem ob

$$\frac{B p d}{U_0} > \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad < \sqrt{2} \quad (12 b)$$

ist. U_0 ist dabei der Wert der Zündspannung ohne Magnetfeld und U_{0k} speziell die Zündspannung beim kritischen Wert $(pd)_k$. Eine Berechnung von $(pd)_k$ dürfte schwierig sein, weil U_0 und pd durch die Zündspannungskurve (Abb. 2) miteinander verknüpft sind. Wir gelangen aber zu einer einfachen Konstruktion des kritischen Wertes auf

folgende Weise: Die Bedingung für das Zündspannungsminimum ohne Magnetfeld [12] ist

$$\frac{B (\phi d)_{\min}}{U_{0\min}} = 1. \quad (13)$$

Diese Beziehung bedeutet, daß die Neigung der Geraden vom Ursprung zum Ort des Zündspannungsminimums auf der Zündspannungskurve (Abb. 2)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{U_{0\min}}{(\phi d)_{\min}} = B \quad (13 \text{ a})$$

den Wert B hat. Eine Gerade vom Ursprung zu dem Punkt U_{0k} auf der Zündspannungskurve, der zum kritischen Wert $(\phi d)_k$ gehört, hat die Neigung

$$\operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{U_{0k}}{(\phi d)_k} = \frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2}},$$

wobei von Gl. (12 a) und (13 a) Gebrauch gemacht wurde. Entsprechend dieser Beziehung ist der kritische Wert durch den Schnittpunkt der Zündspannungskurve mit einer Geraden aus dem Ursprung gegeben, deren Neigung um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner ist als die Neigung der zuvor erwähnten Geraden zum Zündspannungsminimum. Auf diese Weise findet man

$$(\phi d)_k = 1,07 \text{ Torr cm.}$$

Dieser Wert ist mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung.

Die Beziehungen (12 b) geben den experimentellen Befund wieder, daß der Anfangsverlauf der Zündkennlinien für das Gebiet rechts von $(\phi d)_k$ steigend und für das Gebiet links von $(\phi d)_k$ fallend ist (Abb. 2).

2. Anfangsverlauf der Zündkennlinien.

Die Zündbedingung für den Fall kleiner Magnetfelder haben wir bereits in Gl. (11) angeschrieben. Andererseits lautet die Zündbedingung für den magnetfeldfreien Fall nach Gl. (10)

$$a d = A \phi d e^{-\frac{B \phi d}{U_0}} = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (10 \text{ a})$$

Da γ konstant ist, erhalten wir die Gleichung für den Anfangsverlauf der Zündkennlinie durch Gleichsetzen der Ausdrücke (11) und (10 a). Wir setzen $U = U_0 (1 + A)$, dividieren durch die Hauptglieder und entwickeln bis zu Größen, die klein dritter Ordnung sind, wobei zu berücksichtigen ist, daß nicht nur A , sondern auch Hd in diesem Fall eine kleine Größe ist. Wir erhalten schließlich

$$\frac{U - U_0}{U_0} = \frac{V_i}{45,4 B^2 (\phi d)^2} \left[\left(\frac{B \phi d}{U_0} \right)^2 - 2 \right]. \quad (14)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer liefert die gleichen Aussagen wie die Gl. (12 a) und (12 b) im vorigen Abschnitt und bestimmt somit das Vorzeichen der Zündspannungsänderung. Weiter erkennt man aus Gl. (14): Die Zündspannung ist bei gegebenem pd nur von Hd abhängig. Dies ist das *Ähnlichkeitsgesetz*, dem, wie wir sahen, auch die Meßergebnisse gehorchen. Die prozentuale Zündspannungsänderung ist proportional $(Hd)^2$. Speziell für $pd < (pd)_k$ ist sie umso größer, je kleiner pd ist. Bei sehr großen pd wird der Klammerausdruck wegen $U_0 \text{ prop. } B \cdot pd$ [12] konstant. Die prozentuale Zündspannungsänderung wird daher proportional $(pd)^{-2}$, das heißt sie nimmt bei $(pd) > (pd)_k$ mit wachsendem pd sehr rasch kleine Werte an. Auch diese Aussagen entsprechen der Erfahrung.

Wie man aus Gl. (14) erkennt, könnte man die Zündkennlinie auch so darstellen, daß man die Zündspannung als Funktion von H/p bei gegebenem pd aufträgt. Da aber bei kleinen $2D/\lambda$ und $\gamma = \text{const.}$ die Zündkennlinie in ihrem Verlauf unabhängig von p wird, ist für kleine p die Darstellung U als Funktion von H/p unzweckmäßig. Hingegen ist die Darstellung von U als Funktion von Hd auch bei kleinen Drucken noch brauchbar, wie wir in Abschnitt IV, Nr. 5 sehen werden.

Zur quantitativen Prüfung von Gl. (14) ist im Gebiet $pd < (pd)_k$ nur die Zündkennlinie für $pd = 0,27$ Torr cm in Abb. 4 geeignet, weil nur bei dieser Zündkennlinie Werte bei hinreichend kleinen Hd aufgenommen wurden. Im Gebiet $pd > (pd)_k$ vollziehen wir die Prüfung an den beiden Zündkennlinien für $pd = 2,8$ und $3,0$ Torr cm in Abb. 3. In dem pd -Gebiet, in dem diese Messungen liegen, ist die Größe B keine Konstante, sondern von pd bzw. p/E abhängig, und zwar in dem Sinne, daß sie mit abnehmendem pd stark ansteigen [10]. Für $pd = 2,8$ und $3,0$ Torr cm findet man $B = 290$ V/Torr cm. Für $pd = 0,27$ bestimmt man durch Extrapolation über den letzten Meßwert bei $pd = 0,4$ Torr cm hinaus den Wert $B = 500$ V/Torr cm. Dieser Wert ist also dementsprechend unsicher. Das starke Ansteigen von B im Gebiet unterhalb $(pd)_{\min}$ steht mit der Tatsache im Zusammenhang, daß die TOWNSENDsche Theorie in diesem Gebiet aufhört, die Verhältnisse richtig zu beschreiben [12].

Man erhält folgende Werte:

Abb.	pd Torr cm	U_0 Volt	B	$\frac{U - U_0}{(Hd)^2}$ in $\left[\frac{\text{Volt}}{(\text{Gauß cm})^2} \right]$	
			$\frac{\text{Volt}}{\text{Torr cm}}$	berechnet	gemessen
3	3,0	540	290	$+1,4 \cdot 10^{-4}$	$+1,0 \cdot 10^{-4}$
3	2,8	520	290	$+1,1 \cdot 10^{-4}$	$+0,9 \cdot 10^{-4}$
4	0,27	489	500	$-1,7 \cdot 10^{-2}$	$-1,0 \cdot 10^{-2}$

In Anbetracht der groben Vereinfachungen bei der Herleitung von Gl. (14) einerseits und der Unsicherheit der Größe B andererseits dürfte eine genauere Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung kaum zu erwarten sein. Die prozentualen Abweichungen zwischen Rechnung und Messung sind etwa die gleichen wie sie z. B. bei der Bestimmung der Koeffizienten A und B der Ionisierungszahl im magnetfeldfreien Fall auftreten.

3. Kurven gleichen Rollkreisdurchmessers im Kennlinienfeld ($4D/\lambda = \text{const.}$).

Es ist für manche Überlegungen nützlich, für ein gegebenes pd Kurven $4D/\lambda = \text{const.}$ ins Kennlinienfeld einzutragen. Nach Gl. (3) und (8) ergibt sich

$$\frac{4D}{\lambda} = 45,4 A \, pd \frac{U}{(Hd)^2}. \quad (15)$$

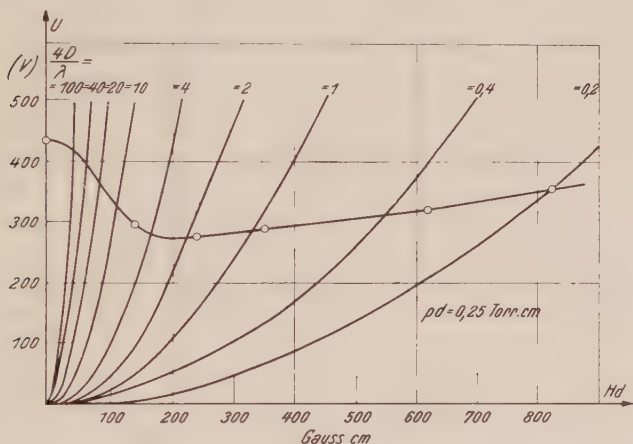


Abb. 11. Kurven gleichen Rollkreisdurchmessers ($4D/\lambda = \text{const.}$) im Kennlinienfeld.

Läßt man $4D/\lambda$ verschiedene Werte annehmen, so erhält man eine Schar von Parabeln, wie sie z. B. in Abb. 11 gemeinsam mit einer Zündkennlinie für $pd = 0,25$ Torr cm eingetragen sind. Der Parameter der Parabeln ist nach Gl. (15) abhängig von pd und somit für verschiedene Zündkennlinien verschieden. So würde z. B. die Parabel $4D/\lambda = 1$ in Abb. 11 die Bezeichnung $4D/\lambda = 10$ erhalten, wenn anstatt der Zündkennlinie für $pd = 0,25$ diejenige für $pd = 2,5$ Torr cm in Abb. 11 eingetragen würde.

Die Parabelschar in Abb. 11 läßt folgendes in bezug auf die Zündkennlinie für $pd = 0,25$ Torr cm erkennen: Im Bereich $Hd = 0 \dots 70$ Gauß cm, in dem die Messungen des parabolischen Anfangsverlaufes (Abb. 4) lagen, ist $4D/\lambda > 20$ und somit die im vorigen Kapitel benutzten Näherungen Gl. (4 b) und (5 a) gerechtfertigt. Im Minimum

der Zündkennlinie ist $4 D/\lambda = 2$. Das bedeutet: Die Bogenlänge der Zykloide ist doppelt so groß wie die mittlere freie Weglänge der Elektronen. Somit gilt bis in den Bereich des Minimums hinein die bisher gemachte Annahme $\gamma = \text{const.}$ Andererseits ist $4 D/\lambda$ im Minimum schon so klein, daß wir bereits die Näherungen Gl. (4 c) und (5 b) der Ausgangsgleichungen für $2 D \ll \lambda$ ansetzen können. Diese Näherungen gelten natürlich erst recht für das Gebiet rechts vom Minimum der Zündkennlinie, und zwar nicht nur bei der Zündkennlinie in Abb. 11, sondern auch bei den Zündkennlinien in Abb. 5, wo pd kleiner als 0,25 Torr cm ist. Allerdings ist dabei zu beachten, daß für $4 D/\lambda < 1$ eine Abnahme von γ mit abnehmendem $4 D/\lambda$ zu erwarten ist.

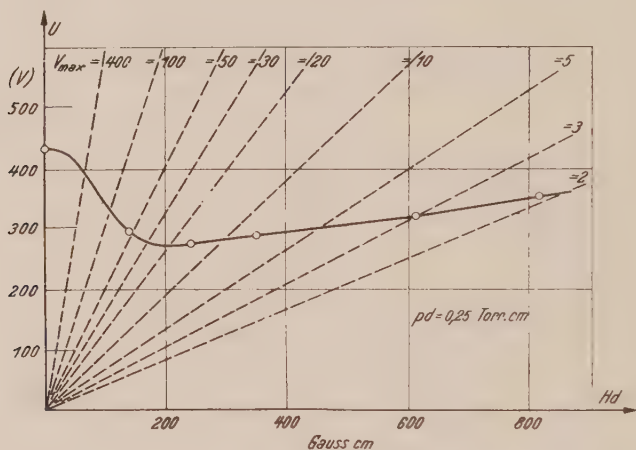


Abb. 12. Kurven gleicher Maximalenergie im Kennlinienfeld.

4. Kurven gleicher Maximalenergie im Kennlinienfeld ($U/Hd = \text{const.}$).

Eine weitere Kurvenschar im Kennlinienfeld erhalten wir, wenn wir die Energie betrachten, die ein Elektron beim Durchlaufen des Zykloidenbogens maximal aus dem elektrischen Feld aufnehmen kann. Diese Energie ist

$$e V_{\max} = e E D = e \frac{11,35 U^2}{(Hd)^2}. \quad (15)$$

Für einen vorgegebenen Wert der Maximalenergie $e V_{\max}$ wird diese Gleichung im Kennlinienfeld durch eine Gerade durch den Ursprung dargestellt. Je höher die Neigung

$$\frac{U}{Hd} = \sqrt{\frac{V_{\max}}{11,35}} \quad (17)$$

dieser Geraden ist, umso höher ist die auf der Zykloidenbahn maximal aufgenommene Energie (Abb. 12).

5. Zündkennlinie für den Fall $2D < \lambda$.

Führen wir in die Gl. (7) die Näherungen (4 c) und (5 b) für $2D \ll \lambda$ ein, so erhalten wir als Zündbedingung

$$\alpha d = \frac{(Hd)^2}{7,6 U} \sqrt{1 - \frac{V_i (Hd)^2}{11,35 U^2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (18)$$

Dieser Ausdruck stellt die Zahl αd der ionisierenden Stöße eines Elektrons auf dem Wege von der Kathode zur Anode für den Fall dar, daß die mittlere freie Weglänge groß gegen die Zykloidenbogenlänge ist. Wie man sieht, ist diese Zahl und damit selbstverständlich auch die Ionisierungszahl α selbst bei gegebener Gasart (V_i und γ) nur abhängig von U und Hd , aber unabhängig vom Druck. Der Grund für diese Unabhängigkeit vom Druck liegt darin, daß sowohl die mittlere freie Fallhöhe wie auch das Verteilungsgesetz vom Druck praktisch nicht mehr abhängen, sobald die mittlere freie Weglänge größer als die Bogenlänge einer Zykloidenbahn ist. Wir haben damit ein grundsätzlich anderes Verhalten vor uns als sowohl bei dem zuvor behandelten Fall kleiner Magnetfelder wie auch bei der magnetfeldfreien Entladung. Speziell bei letzterer ist es so, daß die Ionisierungszahl sehr stark, und zwar exponentiell vom Druck — genauer gesagt E/p — abhängt.

Wir nehmen wie früher $\gamma = \text{const.}$ an. Die Zündspannung U ist dann bei gegebener Gasart und gegebenem γ nur von Hd abhängig. Diese Aussage stellt das *Ähnlichkeitsgesetz* für den Fall $2D \ll \lambda$ dar.

Unter der Voraussetzung $\gamma = \text{const.}$ ist nach Gl. (18) die Zündspannung unabhängig vom Druck. Es fallen daher unterhalb eines bestimmten Druckes die Zündkennlinien für verschiedene pd in eine einzige zusammen. Um den Verlauf dieser Zündkennlinie zu ermitteln, lösen wir Gl. (18) nach U auf. Man erhält eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen

$$U_{12} = \sqrt{\frac{(Hd)^4}{2 \left(7,6 \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right)^2}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 V_i \left(7,6 \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right)^2}{11,35 (Hd)^2}} \right] \quad (19)$$

Das $\pm$ -Zeichen unter der Wurzel zeigt an, daß die Zündspannung *zweideutig* ist. Wir nehmen an, $(Hd)^2$ sei hinreichend groß, daß der Summand neben 1 unter der zweiten Wurzel kleiner als 0,1 ist. Das ist für $V_i = 15$ V und $\ln(1 + 1/\gamma) = 4$ bei $Hd > 200$ der Fall. Dann können wir die Wurzel in der eckigen Klammer entwickeln und erhalten schließlich als *erste* Lösung

$$U_1 = \frac{(Hd)^2}{7,6 \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)} \left(1 - \frac{V_i \left[7,6 \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right]^2}{22,7 \cdot (Hd)^2} \right) \approx \frac{(Hd)^2}{7,6 \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}. \quad (20)$$

Die zuletzt vorgenommene Vernachlässigung ist auch nur bei hinreichend großen Hd gerechtfertigt.

Als zweite Lösung ergibt sich unter den gleichen Vernachlässigungen

$$U_2 = \sqrt{\frac{V_i}{11,35}} Hd. \quad (21)$$

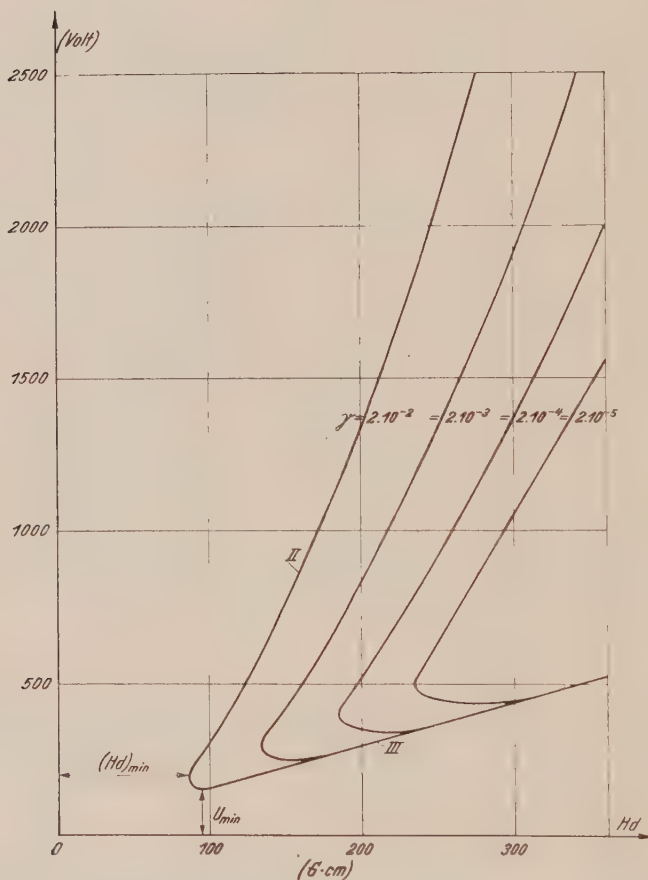


Abb. 13. Theoretische Zündkennlinien bei niedrigem Druck für verschiedene Werte γ .

Die nach Gl. (19) mit den Werten $V_i = 22,7$ V und $\gamma = 2 \cdot 10^{-2} \dots 2 \cdot 10^{-5}$ berechneten Zündkennlinien (Abb. 13) zeigen entsprechend diesen beiden Lösungen einen parabolischen Ast II und einen geradlinigen Ast III.

Über die physikalische Bedeutung dieser beiden Kurvenäste gewinnt man leicht Aufschluß, wenn man von der Zündbedingung in der Form der Gl. (18) ausgeht und von dem Ausdruck (16) für die Maximal-

energie Gebrauch macht. Man kann dann für die Zündbedingung schreiben

$$\alpha d = \frac{(Hd)^2}{7,6 U} \sqrt{1 - \frac{V_i}{V_{max}}} = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (22)$$

Berücksichtigt man die Erörterungen über die Kurven gleicher Maximalenergie, so sieht man (Abb. 13), daß für den parabolischen Ast *II* gilt: Maximalenergie $e V_{max}$ groß gegen Ionisierungsenergie $e V_i$. Diese Tatsache findet auch darin ihren Ausdruck, daß die Zündbedingung Gl. (22) unter der Bedingung $V_{max} \gg V_i$ sofort das Parabelgesetz Gl. (20) liefert. Eine Parabel im Kennlinienfeld ist aber nach Abschnitt IV, 3, bei gegebenem ρd der geometrische Ort für Zustände gleichen Rollkreisdurchmessers D oder — was nach Gl. (5 b) dasselbe ist — für Zustände gleicher mittlerer Fallhöhe $\bar{x}$.

Vergleicht man die beiden Gln. (17) und (21), so erkennt man, daß für den geradlinigen Ast *III* gilt: Maximalenergie $e V_{max}$ = Ionisierungsenergie $e V_i$. Diese Gerade stellt somit die durch die Größe der Ionisierungsenergie bedingte Grenze des Zündbereiches der Entladung dar. Bei Zuständen U — Hd , die im Kennlinienfeld unterhalb dieser Geraden liegen, reicht die auf einem Zykloidenbogen aufgenommene Energie zur Ionisierung nicht mehr aus.

6. Mehrdeutigkeit der Zündspannung.

Die physikalische Ursache der Mehrdeutigkeit der Zündspannung erkennt man am ehesten aus dem Verlauf der Ionisierungszahl α in Abhängigkeit von U bei gegebenem H . Nach Gl. (18) erhalten wir

$$\frac{\alpha}{H} = \frac{\alpha d}{Hd} = \frac{1}{7,6} \frac{Hd}{U} \sqrt{1 - \frac{V_i}{11,35} \left(\frac{Hd}{U} \right)^2}. \quad (23)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 14 dargestellt. Berücksichtigen wir noch, daß die Bedingung für eine Zündkennlinie $\alpha d = \text{const.}$ ist, so sagt Abb. 14 folgendes aus: Zu einem vorgegebenen Wert $\alpha d/Hd$, das heißt zu einem bestimmten Wert Hd einer bestimmten Zündkennlinie gehören zwei Werte Hd/U . Da aber Hd vorgegeben ist, heißt dies: *zwei* Werte von U . Dieses Ergebnis ist darin begründet, daß die Ionisierungszahl α als Funktion von U bei gegebenem H ein Maximum durchläuft, und somit zu jedem Wert α *zwei* Werte von U gehören.

Die Zündspannung *ohne* Magnetfeld in Abhängigkeit von ρd ist im allgemeinen eindeutig. Nur ein einziger Fall ist offenbar bisher bekannt geworden, wo PENNING [11] bei Helium eine Mehrdeutigkeit der Zündspannung in einem gewissen ρd -Bereich findet. PENNING erklärt diese Erscheinung damit, daß die Kurve α/ρ als Funktion von ρ/E bei Helium nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt. Dieser Fall ist dem unsrigen völlig analog, da die Größen ρ und H einander entsprechen. In unserem Fall $2D \ll \lambda$ hat der Druck — $\gamma = \text{const.}$ vorausgesetzt — keinen Einfluß mehr auf den Verlauf der Zündkennlinie; seine Rolle ist gewissermaßen vom Magnetfeld übernommen

worden. Bei anderen Gasen als Helium ist bisher im magnetfeldfreien Fall kein Absinken von a/p nach Erreichen des Maximums beobachtet worden und dementsprechend auch keine Mehrdeutigkeit der Zündspannung.

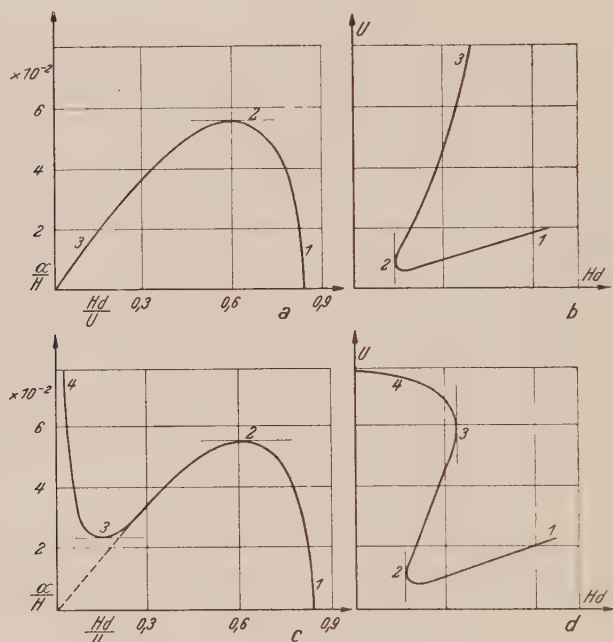


Abb. 14. *a* Ionisierungszahl a als Funktion der Spannung U ; nach Gl. (23) berechnet mit $V_0 = 16$ Volt. *b* Die aus *a* konstruierte Zündkennlinie bei niedrigen Drucken (schematisch). *c* Ionisierungszahl a als Funktion der Spannung U unter Berücksichtigung des Anfangsverlaufs der Zündkennlinie. *d* Die aus *c* konstruierte Zündkennlinie bei niedrigen Drucken einschließlich des Anfangsverlaufs (schematisch).

Aus dem Verlauf der Ionisierungszahl a/H (Abb. 14 *a*) kann man natürlich auch die Zündkennlinie ermitteln, indem man $a d = \text{const.}$ setzt. Man erhält dann zunächst unmittelbar aus der Kurve Hd als Funktion von Hd/U und daraus durch Umrechnung U als Funktion von Hd . Die in Abb. 14 *a* markierten Punkte 1, 2, 3 ergeben die entsprechend bezeichneten Punkte der Zündkennlinie (Abb. 14 *b*).

Wir haben noch die Tatsache zu berücksichtigen, daß die Zündkennlinie bei sehr hohen Spannungen in die U -Achse einmündet und ihr Anfangsverlauf bei kleinen Hd durch Gl. (14) bestimmt ist. Aus dieser Gleichung finden wir für kleine Hd und kleine p einen Verlauf a/H , der in Abb. 14 *c* im Gebiet 3 bis 4 eingetragen ist und den strichliert gezeichneten Teil ersetzt⁵. Aus dieser Darstellung geht nach dem

⁵ Der Verlauf 3 bis 4 ist nur qualitativ zu werten. Quantitativ liegen die Verhältnisse z. B. bei Hg von 10^{-3} Torr und $U_0 = 35$ kV so, daß die Kurve unmittelbar neben der a/H -Achse steil abfällt und im Punkt $a/H = 5 \cdot 10^{-4}$ und $Hd/U = 7 \cdot 10^{-3}$, also sehr nahe am Ursprung ihren Tiefpunkt erreicht.

oben Gesagten ohne weiteres die *Dreideutigkeit* der Zündspannung in einem gewissen, durch die Extrema 2 und 3 gegebenen *Hd*-Bereiche hervor.

7. Minimales Magnetfeld: $(Hd)_{\min}$.

Das Maximum der Kurve $\alpha d/Hd$ (Abb. 14 a) bedeutet ein Minimum von *Hd* und entspricht dem Minimalwert $(Hd)_{\min}$ der Zündkennlinie. Durch Differentiation des Ausdrucks (23) nach Hd/U und Nullsetzen erhalten wir als Bedingung für $(Hd)_{\min}$

$$\frac{11,35 U^2}{(Hd)^2} = 2 V_i. \quad (24)$$

Berücksichtigen wir Gl. (16), so folgt aus Gl. (24): Der Minimalwert $(Hd)_{\min}$ liegt dann vor, wenn die vom Elektron auf seiner Zykloidenbahn maximal aufgenommene Energie gleich der doppelten Ionisierungsenergie ist. Setzt man Gl. (24) in die Zündbedingung Gl. (18) ein, so erhält man

$$(Hd)_{\min} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{e}} \sqrt{V_i} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) = 4,50 \sqrt{V_i} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (25)$$

$(Hd)_{\min}$ steigt also logarithmisch mit abnehmendem γ .

8. Minimale Zündspannung $U_{\min}$.

Die Zündspannung hat ein Minimum, wenn der Ausdruck $\alpha d/U$, das heißt die auf die elektrische Feldstärke bezogene Ionisierungszahl ein Maximum hat. Die Richtigkeit dieser Aussage wird evident, wenn man berücksichtigt, daß die Zündkennlinie die Bedingung $\alpha d = \text{const.}$ erfüllt. Aus Gl. (18) ergibt sich

$$\frac{\alpha d}{U} = \frac{\alpha}{E} = \frac{1}{7,6} \left(\frac{Hd}{U} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{V_i}{11,35} \left(\frac{Hd}{U} \right)^2}. \quad (26)$$

Abb. 15 a zeigt den Verlauf von Gl. (26). Aus dieser Abbildung kann selbstverständlich wiederum die Zündkennlinie (Abb. 15 b) ermittelt werden. Die in beiden Abbildungen durch 1, 2, 3 gekennzeichneten Punkte entsprechen einander. Wie Abb. 15 a zeigt, gehören zu einem gegebenen $\alpha d/U$ -Wert zwei Werte Hd/U , das heißt zu jedem $U > U_{\min}$ gehören zwei *Hd*-Werte. Dieses Ergebnis ist völlig analog demjenigen, das das Diagramm $\alpha/E = f(p/E)$ bei der magnetfeldfreien Entladung liefert, nämlich daß zu einem gegebenen Wert $U_0 > U_{0\min}$ zwei Werte von $p d$ gehören.

Differenzieren von Gl. (26) nach Hd/U und Nullsetzen ergibt als Bedingung für $U_{\min}$

$$V_i = \frac{2}{3} \frac{11,35 U^2}{(Hd)^2} = \frac{2}{3} D E = \bar{x} \cdot E. \quad (27)$$

Die beiden letzten Umformungen erfolgten unter Benutzung von Gl. (3) und (5 b). Physikalisch bedeutet die Gl. (27): Das Zündspannungsminimum wird dann erreicht, wenn die vom Elektron pro mittlere freie Fallhöhe $\bar{x} = 2/3 D$ aus dem elektrischen Feld aufgenommene Energie $e E \bar{x}$ gleich der Ionisierungsenergie des Gasatoms ist. Dieses Verhalten entspricht völlig demjenigen, das bei der magnetfeldfreien Entladung beobachtet wird. Bei dieser liegt nämlich das Zündspannungsminimum dann vor, wenn die vom Elektron pro mittlere freie Weglänge λ aufgenommene Energie $e E \lambda$ gleich der Ionisierungsenergie ist. Die Ionisierung erfolgt energetisch dann am günstigsten [12].

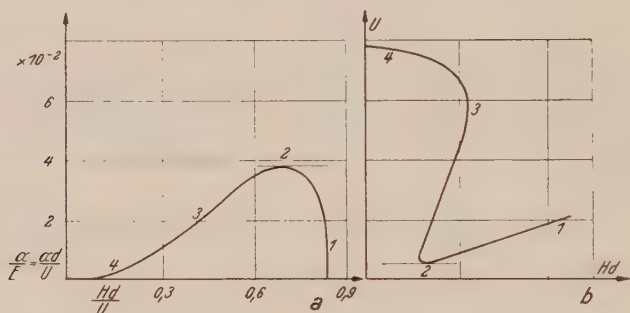


Abb. 15. a Ionisierungszahl α als Funktion der magnetischen Feldstärke H berechnet nach Gl. (26) mit $V_i = 15$ V. b Die aus a konstruierte Zündkennlinie bei niedrigen Drucken (schematisch).

Den Wert der minimalen Zündspannung finden wir durch Einsetzen von Gl. (27) in Gl. (18). Wir erhalten

$$U_{\min} = \sqrt{3} V_i \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (28)$$

$U_{\min}$ steigt ebenso wie $(Hd)_{\min}$ logarithmisch mit abnehmendem γ . Bei der magnetfeldfreien Entladung ist das Minimum der Zündspannung [12]

$$U_{0\min} = 2,718 \cdot V_i \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (29)$$

Die beiden minimalen Zündspannungen mit und ohne Magnetfeld verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2,718 = 0,64$.

9. Zündbereich und Realisierung der Zündkennlinie im Gebiet der Dreideutigkeit der Zündspannung.

Die Zündkennlinie erfüllt die Bedingung: Totales Differential $d(\alpha d) = 0$. Bewegt man sich im Kennlinienfeld von einem Punkt nahe der Zündkennlinie, aber außerhalb des Zündbereiches, aus fort,

so gelangt man in den Bereich der Zündung, falls man sich so bewegt, daß die Zahl αd der ionisierenden Stöße zunimmt. Es muß dann also gelten:

$$d(\alpha d) = \frac{\partial \alpha d}{\partial U} dU + \frac{\partial \alpha d}{\partial Hd} d(Hd) > 0. \quad (30)$$

Je nachdem, ob man nun bei konstantem Hd oder bei konstantem U die Zündung herbeiführen will, lautet die Vorschrift dafür, in welcher Richtung U , bzw. Hd zum Zwecke der Zündung verändert werden müssen:

Für $Hd = \text{const.}:$ $\frac{\partial \alpha d}{\partial U} dU > 0$ (30 a)

bzw.

für $U = \text{const.}:$ $\frac{\partial \alpha d}{\partial Hd} d(Hd) > 0.$ (30 b)

Es kommt somit wesentlich auf das Vorzeichen der partiellen Differentialquotienten an. Dieses Vorzeichen können wir den Abb. 14 c bzw. 15 a entnehmen. Es ergibt sich dann für die einzelnen Abschnitte der Zündkennlinie in Bezug auf die Spannung bei konstant gehaltenem Hd :

Abschnitt d. Kennlinie	$\frac{\partial \alpha d}{\partial U}$ ¹ nach Abb. (14 c)	folglich dU nach Gl. (30a)	d. h. zwecks Zündung wird bei gegebenem Hd die
1—2	> 0	> 0	Spannung U erhöht
2—3	< 0	< 0	Spannung U erniedrigt
3—4	> 0	> 0	Spannung U erhöht

¹ Man beachte, daß wegen $\frac{\partial \alpha d}{\partial (Hd/U)} = -\frac{\partial \alpha d}{\partial U} \left(\frac{Hd}{U^2} \right)$ das Vorzeichen von $\frac{\partial \alpha d}{\partial U}$ entgegengesetzt ist zum Vorzeichen der Neigung der Kurve Abb. 14 c.

In Bezug auf Hd ergibt sich für die einzelnen Abschnitte der Zündkennlinie bei konstant gehaltenem U :

Abschnitt d. Kennlinie	$\frac{\partial \alpha d}{\partial Hd}$ nach Abb. (15 a)	folglich $d(Hd)$ nach Gl. (30 b)	d. h. zwecks Zündung wird bei gegebener Spannung
1—2	< 0	< 0	Hd erniedrigt
2—3	> 0	> 0	Hd erhöht
3—4	< 0	< 0	Hd erhöht

Das Ergebnis dieser Überlegung ist in Abb. 16 durch Pfeile angedeutet, die an der Kennlinie angebracht sind und unmittelbar erkennen lassen, in welcher Weise die Punkte der Zündkennlinie in den einzelnen Abschnitten zu realisieren sind. Insbesondere sei auf das von den gewohnten Vorstellungen abweichende Verhalten hingewiesen, daß die

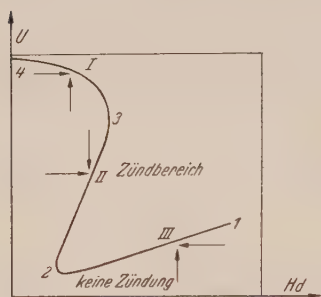


Abb. 16. Zündbereich und Realisierung der Zündkennlinie.

Zündung im Abschnitt 1 bis 2 bei gegebener Spannung durch *Erniedrigung* des Magnetfeldes und im Abschnitt 2 bis 3 bei gegebenem Magnetfeld durch *Erniedrigung* der Spannung erzielt wird. In allen anderen Fällen wird die Zündung in der gewohnten Weise: Erhöhung der Spannung bzw. Erhöhung von Hd herbeigeführt. Aus diesen Überlegungen folgt weiter, daß der Zündbereich in dem Zustandsgebiet rechts oberhalb der Zündkennlinie, wie in Abb. 16 angedeutet, liegt.

10. Vollständige Zündkennlinie für pd zwischen dem kritischen Wert und 10^{-2} Torr cm.

Bei den Zündkennlinien des in der Überschrift genannten pd -Bereiches (Abb. 17 a und 17 b) ist die Zündspannung U_0 ohne Magnetfeld so niedrig, daß die Zündkennlinie von U_0 aus abfallend über das Minimum U_{min} direkt in den geradlinig ansteigenden Ast III übergeht, ohne daß der Ast II berührt wird. Die vollständige Zündkennlinie besteht also aus dem fallenden Anfangsteil I, der nach Gl. (14) zu berechnen ist, und dem ansteigenden Ast II nach Gl. (21). Der Übergang zwischen beiden Kurvenzügen erfolgt über das Zündspannungsminimum nach Gl. (28). Die Zündspannung ist im ganzen Hd -Bereich eindeutig. Der Bereich der Zündung ist das oberhalb der Zündkennlinie liegende Gebiet.

Der Verlauf des Anfangsteiles I nach Gl. (14) ist bereits in Abschnitt IV, 2 mit der Erfahrung verglichen worden. Es ist jetzt noch der daran sich anschließende Teil der Zündkennlinie experimentell zu prüfen. Zur Prüfung des Wertes der minimalen Zündspannung U_{min} eignet sich von den vorliegenden Messungen nur die Zündkennlinie für $pd = 0,25$ Torr cm, weil nur bei dieser Kennlinie im Bereich des Minimums die Rückführungsgröße γ gegenüber dem Wert ohne Magnetfeld nicht vermindert sein dürfte, wie in Abschnitt III, 2 besprochen. Man findet experimentell für das Minimum dieser Zündkennlinie $U_{min} \approx 278$ V und für das Minimum der Zündspannungskurve ohne Magnetfeld $U_{min} = 360$ V. Wie es der Erwartung entspricht, ist U_{min} niedriger als U_{0min} . Das Verhältnis beider Größen ist experimentell 0,77, während die theoretische Ableitung 0,64 ergab. Die Überein-

stimmung innerhalb von 20%, muß in Anbetracht der groben Näherungen, die unserer Rechnung zugrunde liegen, als durchaus befriedigend bezeichnet werden.

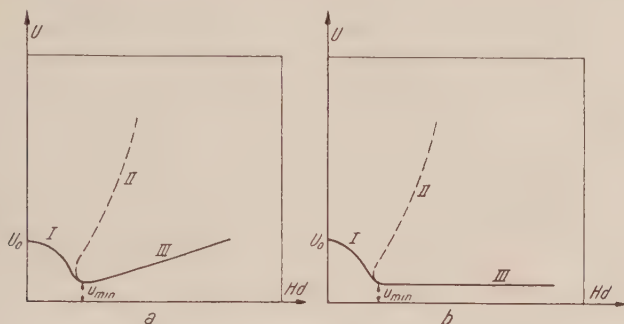


Abb. 17. Vollständige Zündkennlinien im pd -Bereich $1 \dots 10^{-2}$ Torr cm (schematisch). a Im Gebiet III nur unelastische Stöße. b Im Gebiet III nur elastische Stöße.

Es ist ferner theoretisch zu erwarten, daß das Minimum die Bedingung (27) erfüllt, das heißt auf dem Schnittpunkt der Zündkennlinie mit der Geraden

$$\frac{U}{Hd} = \sqrt{\frac{V_i}{7,6}}$$

liegt. Setzen wir für V_i die Ionisierungsspannung der Luft von 16,3 V ein, so erhalten wir die in Abb. 3 gezeichnete Gerade der Neigung 1,46. Man sieht, daß der so konstruierte Schnittpunkt tatsächlich mit dem Ort des Zündspannungsminimums mit guter Annäherung zusammenfällt. Leider liegen die Meßpunkte nicht in genügend dichter Folge, um entscheiden zu können, wie genau diese Aussage erfüllt ist.

Theoretisch ist weiter zu erwarten, daß im Anschluß an das Zündspannungsminimum die Zündkennlinie in den geradlinigen Teil III mit der Neigung Gl. (21)

$$\frac{U}{Hd} = \sqrt{\frac{V_i}{11,35}} = 1,20$$

übergeht. Wie Abb. 3 zeigt, folgt die Zündkennlinie jedoch keineswegs dieser Geraden, sondern steigt wesentlich flacher an. Das gleiche Verhalten zeigen auch die Zündkennlinien bei niedrigeren pd -Werten in Abb. 5. Die Kurven gleicher Maximalenergie $e V_{max}$ in Abb. 12 zeigen, daß auf dem von der Theorie abweichenden, flach ansteigenden Teil der Zündkennlinie Maximalenergien des Elektrons von etwa 20 eV bis zu 2 eV herab vorliegen. Dieser Energiebereich erstreckt sich also bis zu Werten herab, die weit unterhalb der Ionisierungsenergie und auch unterhalb der niedrigsten Anregungsenergie des verwendeten Füllgases liegen. Das Elektron gewinnt somit auf einer Zykloidenbahn keinen Energiebetrag, der groß genug wäre, als daß er in einem un-

elastischen Stoß auf ein Gasatom übertragen werden könnte. Das Elektron kann also in dem vorliegenden Zustandsbereich nur *elastisch* stoßen.

In den Voraussetzungen zu unserer Theorie (Teil III, 3) hatten wir aber die Tatsache elastischer Stöße ausgeschlossen und haben bisher so gerechnet, wie es auch in der einfachen TOWNSENDSchen Theorie geschieht, als kämen nur unelastische Stöße vor. Das Experiment zeigt aber, daß der Zündvorgang in dem gegenwärtig betrachteten Bereich der Zündkennlinie anders verläuft als wir es uns bislang vorgestellt haben. Bei der Reflexion des Elektrons an den wesentlich schwereren Gasmolekülen wird die kinetische Energie des Elektrons nicht wesentlich geändert. Nach dem Stoß ist jede Richtung annähernd gleich wahrscheinlich. Ein gewisser Teil der Elektronen hat eine Komponente der Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes und nimmt somit auf dem Wege bis zum nächsten elastischen Stoß einen weiteren Energiebetrag auf. Auf diese Weise *akkumuliert* das Elektron in einer Reihe von elastischen Stößen einen Energiebetrag, der schließlich zur Ionisierung ausreicht und dann in einem einzigen unelastischen Stoß wieder abgegeben wird, worauf die Akkumulation der Energie von neuem beginnt.

Für den Fall der magnetfeldfreien Entladung ist der Vorgang der Akkumulation der Energie auf dem Wege über elastische Stöße zur Beschreibung einer Möglichkeit der Zündung bereits 1917 von G. HERTZ herangezogen worden [13]. Ferner ist der Einfluß der elastischen Stöße in einer Verfeinerung der TOWNSENDSchen Theorie berücksichtigt worden [14].

Es ist jedoch nicht so, daß der soeben geschilderte Vorgang der Akkumulation in allen Fällen die entscheidende Rolle im Gebiet großer *Hd* spielt. Es kommt z. B. bei Argon bei niedrigen Drucken auch im Gebiet großer *Hd* vor, daß die zur Ionisierung erforderliche Energie auf einem einzigen Zykloidenbogen aufgenommen werden kann. Diese Tatsache zeigt z. B. Kurve *B* in Abb. 6, wo nach Durchschreiten des Minimums ein steiler, etwa der Ionisierungsenergie entsprechender Anstieg der Zündkennlinie erfolgt. Unter welchen Bedingungen nun der eine oder der andere Fall der Energieaufnahme des Elektrons im Gebiet hoher *Hd* auftritt, kann im Augenblick noch nicht gesagt werden.

11. Abhängigkeit der Minimalspannung U_{min} von $\lambda/4 D$.

Bei allen bisherigen Überlegungen hatten wir γ als konstant angenommen. Unter dieser Voraussetzung müßten z. B. die minimalen Zündspannungen nach Gl. (28) unabhängig vom Druck sein. In Wirklichkeit steigen sie aber mit abnehmendem Druck, das heißt zunehmendem $\lambda/4 D$ an. Dieses Ansteigen können wir zwanglos erklären, wenn wir annehmen, daß γ infolge des Effektes der Wiederaufnahme des Elektrons durch die Kathode mit wachsendem $\lambda/4 D$ abnimmt.

$$\frac{\lambda}{4D} = \frac{(Hd)^2}{45,4 \cdot A \cdot p d U}$$

bedeutet dabei die Zahl der Zykloidenbögen, die ein Elektron pro mittlere freie Weglänge zurücklegt oder, was dasselbe ist, die Zahl der Reflexionen des Elektrons an der Kathode, die im Mittel nötig ist, um auf ein Gasatom zu stoßen. Macht nun ein Elektron im Mittel ν Reflexionen an der Kathode, ehe es von dieser wieder aufgenommen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es während seiner „Lebensdauer“ ionisiert und damit freibleibt $4D\nu/\lambda$. Da diese Wahrscheinlichkeit mit abnehmendem pd abnimmt, wird nach dem in III, 2 Gesagten auch γ gegenüber dem Wert ohne Magnetfeld erniedrigt und damit die Zündspannung erhöht werden.

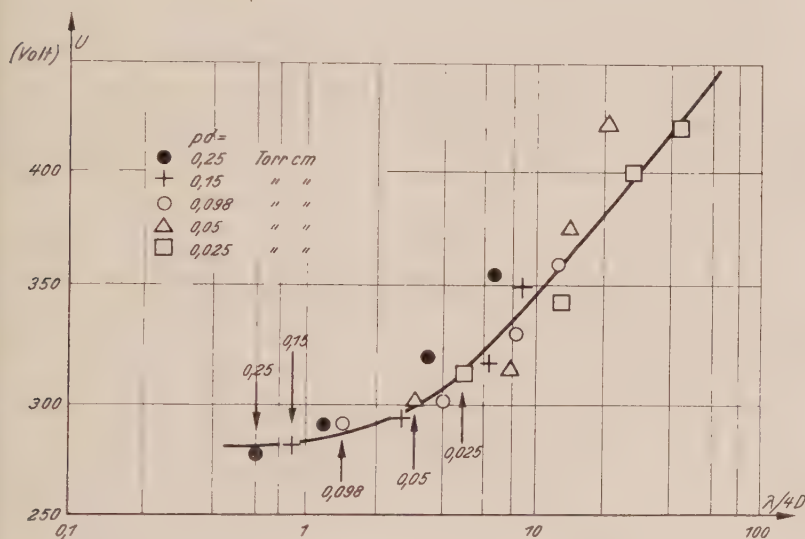


Abb. 18. Minimale Zündspannung in Abhängigkeit von $\lambda/4D$.

Abb. 18 zeigt die aus den Zündkennlinien (Abb. 5) entnommenen U_{min} -Werte in Abhängigkeit von $\lambda/4D$. Sie sind durch Pfeile gekennzeichnet, an denen der pd -Wert vermerkt ist. Zu einer quantitativen Behandlung reichen diese wenigen Meßwerte noch nicht aus. Sie wird in einer folgenden Arbeit mit reicherm Beobachtungsmaterial vollzogen.

Wenn in dem Zustandsgebiet des flach ansteigenden Teiles der Zündkennlinie rechts vom Minimum in den Abb. 5 und 11 die Energieaufnahme des Elektrons durch Akkumulation über eine Reihe von elastischen Stößen erfolgt, so ist an sich nicht einzusehen, warum die Zündspannung mit wachsendem Hd ansteigt. Es wäre vielmehr unter

der Voraussetzung $\gamma = \text{const.}$ zu erwarten, daß sie konstant gleich dem Wert $U_{\min}$ bliebe. Trägt man nun die Werte U des ansteigenden Astes der Zündkennlinien aus den Abb. 5 und 11 auch in Abhängigkeit von $\lambda/4 D$ auf, so sieht man, daß sie gut in den Verlauf hineinpassen, der schon durch die im vorigen Absatz erwähnten $U_{\min}$ -Werte gegeben ist. Es scheint also in beiden Fällen die gleiche Ursache für das Ansteigen der Werte vorzuliegen, nämlich die Erniedrigung von γ mit steigendem $\lambda/4 D$. Wäre also γ in Wirklichkeit konstant, so wäre auch der Wert $U_{\min}$ und der Verlauf der Zündkennlinien rechts von $U_{\min}$ unabhängig vom Druck. Es müßten dann in diesem Gebiet alle bei verschiedenem $p d$ aufgenommenen Zündkennlinien in eine einzige zusammenfallen, wie es die unter der Voraussetzung $\gamma = \text{const.}$ entwickelte Theorie verlangt.

12. Zündkennlinien bei niedrigen Drucken: Diskussion der Messungen.

Wie bereits in der Einleitung begründet, müssen wir uns bei den Zündkennlinien im Gebiet niedriger Drucke darauf beschränken, die Theorie nur qualitativ zu prüfen. Der Teil I in Abb. 16 bei kleinen Hd interessiert uns in diesem Abschnitt nicht, weil er schon in IV, 2, besprochen wurde.

Der Teil II soll nach Gl. (20) eine Parabel $U \sim (Hd)^2$ sein. Auch der im letzten Abschnitt besprochene Einfluß des Effektes der Wiederaufnahme des Elektrons durch die Kathode auf γ ist wegen $\lambda/4 D = \text{const.}$ längs einer Parabel konstant. Damit müßte auch γ und dadurch wiederum der Parameter der Parabel in Gl. (20) konstant sein. In der Tat zeigen die Kurven *A* und *B* in Abb. 6 einen Verlauf, der sich einer Parabel anschließt, wie durch die miteingezeichneten Parabeln zu erkennen ist. Allerdings steigen die Zündkennlinien in beiden Fällen etwas steiler an, als es der Parabel entspricht. Die Erklärung hierfür könnte darin bestehen, daß die Größe γ mit wachsender Geschwindigkeit der auf die Kathode treffenden Ionen zunimmt, wie es durch Messungen von γ bei Ionen hoher Geschwindigkeit von PENNING [15] gefunden worden ist.

Wie schon erwähnt, beobachtet man als Teil III der Zündkennlinie entweder einen steil ansteigenden Ast (Abb. 6, Kurve *B*), der der theoretischen Erwartung annähernd entspricht, oder einen nur sehr flach ansteigenden Ast (Kurve *A*), der seine Erklärung in der Annahme der Akkumulation der Energie im Sinne von Abschnitt 8 finden könnte. Allerdings erscheint diese Erklärung in diesem Fall insofern unsicher, als die Elektronen auch an den seitlichen Wänden der Kathode ausgelöst sein können.

Der experimentell gefundene Verlauf der Zündkennlinien bei niedrigen Drucken und damit insbesondere auch die Dreideutigkeit der Zündspannung entsprechen qualitativ völlig der theoretischen Er-

wartung. Auch die Überlegungen hinsichtlich der Realisierung der Meßwerte auf den einzelnen Ästen der Zündkennlinie werden im Experiment vollkommen bestätigt.

Da mit abnehmendem Druck auch γ abnimmt, ist zu erwarten, daß sich die Kennlinien bei Druckverminderung in Richtung höherer Hd - und höherer U -Werte verschieben. Diese Erwartung wird ebenfalls erfüllt, wenn man mit ein und derselben Anordnung Versuche bei verschiedenen Drucken macht. Die Kurven C und D in Abb. 6 zeigen dieses Verhalten. Insbesondere wachsen sowohl U_{min} wie $(Hd)_{min}$ mit abnehmendem Druck, was in den Gl. (28) und (25) durch den Faktor $\ln(1 + 1/\gamma)$, wobei γ als in Wirklichkeit druckabhängige Größe zu betrachten ist, zum Ausdruck kommt. In den in diesem Abschnitt diskutierten Versuchen umfaßt der Druck einen Bereich von 10^{-2} bis 10^{-8} Torr. Daß sich U_{min} und $(Hd)_{min}$ dabei nur in verhältnismäßig engen Grenzen ändern, liegt daran, daß γ logarithmisch in die Formeln eingeht.

Auch das experimentell im Gebiet kleiner Drucke gefundene Ähnlichkeitsgesetz wird von der Theorie geliefert, wenn man berücksichtigt, daß ein „gegebenes γ “, wie es in der Formulierung des Ähnlichkeitsgesetzes im Anschluß an Gl. (18) hieß, praktisch bedeutet: Gleiches $\lambda/4 D$, gleiches Füllgas, gleiches Elektrodenmaterial und Elektrodenbefreiung an homologen Stellen der Kathoden von den zu vergleichenden ähnlichen Entladungsstrecken.

Wie in der Einleitung erwähnt, sind die Verhältnisse bei den Versuchen im Gebiet niedriger Drucke wegen der Inhomogenität des elektrischen Feldes und der durch die metallischen Seitenwände der Kathode möglicherweise modifizierten Rückführungsgröße γ verwickelter als bei den WEHRLISCHEN Messungen. Hinzu kommt, daß bei niedrigen Drucken und dem entsprechend niedrigen γ zu prüfen ist, ob die Ionisierung durch Stoß positiver Ionen im Gasraum [4] (β -Prozeß) noch, wie bisher geschehen, zu vernachlässigen ist. Auf diese Verhältnisse kommen wir an späterer Stelle zurück. Ebenso auch auf die Stromspannungscharakteristiken nach erfolgter Zündung und die damit zusammenhängende praktische Anwendung der Erscheinungen auf die Konstruktion eines Ionisationsmanometers mit kalter Kathode im Druckbereich 10^{-1} bis 10^{-8} Torr.

Herrn cand. phys. H. BIRKENSCHENKEL danke ich für wertvolle Unterstützung bei der Ausführung der Versuche und der numerischen Auswertung der theoretischen Ergebnisse, z. Zt. Graz, Rechbauerstr. 12.

Literatur.

1. W. O. SCHUMANN, Elektrische Durchbruchfeldstärke in Gasen 1923, S. 65.
2. E. MEYER, Ann. d. Phys. **67**, 1, 1922.
3. M. WEHRLI, Ann. d. Phys. (4), **69**, 285, 1922.
4. F. M. PENNING, Physica, **3**, 873, 1936.
5. R. HAEFER, Aktenvermerk der Siemens & Halske AG. 1951, bisher unveröffentlicht.
6. G. A. KUGLER, F. OLLENDORFF, A. ROGGENDORF, ZS. f. Phys. **81**, 733, 1933.
7. R. OLIPHANT, Proc. Roy. Soc., London (A) **127**, 373, 1930.
8. A. GÜNTHERSCHULZE, ZS. f. Phys. **24**, 140, 1924.
9. KNOLL, OLLENDORFF, ROMPE, Gasentladungstabellen 1923, S. 7.
10. KNOLL, OLLENDORFF, ROMPE, Gasentladungstabellen 1923, S. 70.
11. F. M. PENNING, Proc. Roy. Acad. Amsterdam, **34**, 1303, 1931.
12. v. ENGEL-STEENBECK, Elektrische Gasentladungen, Bd. II, 1934, S. 46.
13. G. HERTZ, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 268, 1917.
14. Handb. Exp. Phys. XIII/3, S. 143 und 108.
15. F. M. PENNING, Proc. Roy. Acad. Amsterdam, **33**, 841, 1930.

Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie.

Von

Gernot Eder.

Institut für Theoretische Physik der Universität Wien.

(Eingelangt am 27. Oktober 1952.)

Unter Voraussetzung pseudoskalarer Mesonen mit pseudovektorieller Kopplung wird das effektive Potential eines zusätzlichen Nukleons im Kernfeld berechnet. Die erhaltene Spin-Bahn-Kopplung steht in qualitativer Übereinstimmung mit dem Experiment, ist aber in der betrachteten Näherung zu klein.

H. GAUS [1] hat gezeigt, daß eine Kombination pseudovektorieller und pseudotensorieller Kopplung in zweiter störungstheoretischer Näherung im effektiven Potential keinen Spin-Bahn-Term aufweist. Ein solcher Term soll nun mit pseudovektorieller Kopplung allein aufgefunden werden. Der Rechnungsgang ist analog zur GAUSSschen Arbeit.

Sei $a_\mu b_\mu = (a \cdot b) + a_4 b_4$, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 \delta_{\mu\nu}$, $\gamma_\mu = \gamma_\mu^+$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, $V = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Die oberen Indizes beziehen sich auf das erste, bzw. zweite Teilchen. Wir verwenden natürliche ($\hbar = c = 1$), 4π -freie Einheiten. m bzw. μ bedeuten die Ruhmassen des Nukleons, bzw. Mesons, φ und χ_a sind die Mesonfeldgrößen; ψ , ψ^* die Spinoren des Nukleonenfeldes. f ist die Kopplungskonstante. T ordnet die nachfolgenden Faktoren in chronologischer Reihenfolge der Argumente von rechts nach links.

Die Vakuumgleichungen des Mesonfeldes lauten:

$$\varphi|_a = \mu^2 \chi_a, \quad \chi_a|_a = \varphi. \quad (1)$$

Die LAGRANGE-Funktion mit dem uns interessierenden Wechselwirkungsterm hat die Gestalt:

$$L = \frac{1}{2} (\chi_{a|a} \chi_{a|a} + \mu^2 \chi_a \chi_a) + f \chi_a \bar{t}_a. \quad (2)$$

Dabei ist:

$$\bar{t}_k = (\psi^* \sigma_k \psi), \quad \bar{t}_4 = -i (\psi^* \gamma_5 \psi). \quad (3)$$

Daher lautet die Wechselwirkungsenergiedichte

$$H(x) = -f \bar{t}_a(x) \chi_a(x), \quad (4)$$

und somit die Streumatrix zweiter Ordnung:

$$S_2 = -\frac{1}{2} f^2 \iint d^4x d^4y T \bar{t}_\alpha \chi_\alpha(x) \bar{t}_\beta \chi_\beta(y). \quad (5)$$

Die Kontraktion der χ_α, χ_β liefert für das Matricelement der Nukleon-Nukleon-Streuung:

$$M = i f^2 (u_{p'}^* u_{q'}^* \{(\sigma^1 \cdot \sigma^2) - \gamma_5^1 \gamma_5^2\} u_p u_q) \Delta_+(k) (2\pi)^4 \Pi_\mu \delta(k_\mu - \Delta_\mu p), \quad (6)$$

wo $k = \Delta q$; $\Delta_\mu p = p'_\mu - p_\mu$, $\Delta_\mu q = q_\mu - q'_\mu$, p, q , bzw. p', q' sind dabei die Energie-Impulsvektoren des ersten und zweiten Teilchens vor, bzw. nach der Streuung. Aus der Gestalt der S -Matrix folgt: $M = -i H$, wo H die Wechselwirkungsenergiedichte ist. Es lautet daher das zu einem beliebigen Zustand $\psi^1(x^1) \psi^2(x^2)$ gehörige Diagonalelement:

$$H = \iint \psi^{*1}(x^1) \psi^{*2}(x^2) V_{12}(x^1 - x^2) \psi^1(x^1) \psi^2(x^2) dv^1 dv^2, \quad (7)$$

wo

$$V_{12} = f^2 \{(\sigma^1 \cdot \sigma^2) - \gamma_5^1 \gamma_5^2\} J, \quad (8)$$

$$J = e^{-i\mu r} / (4\pi r), \quad r = |x|. \quad (9)$$

Gehen wir zu einer zweikomponentigen Darstellung über, so haben wir nach R. BECKER [2] in erster Näherung folgende Substitution durchzuführen:

$$2m \gamma_5 F(x) \rightarrow -2F(\sigma \cdot p) + i(\sigma \cdot \text{grad } F). \quad (10)$$

Dadurch geht $(2m)^2 \gamma_1^5 \gamma_2^5$ über in

$$2m \gamma_5^2 \{ -2J(\sigma^1 \cdot p^1) + i(\sigma^1 \cdot \text{grad}^1 J) \}$$

bzw.

$$2(\sigma^1 \cdot p^1) J(\sigma^2 \cdot p^2) + 2(\sigma^2 \cdot p^2) J(\sigma^1 \cdot p^1) - (\sigma^1 \cdot \text{grad}^1)(\sigma^2 \cdot \text{grad}^2 J),$$

so daß V_{12} übergeht in

$$V_{12} = -2 \left(\frac{f}{2m} \right)^2 \{ (\sigma^1 \cdot p^1) J(\sigma^2 \cdot p^2) + (\sigma^2 \cdot p^2) J(\sigma^1 \cdot p^1) - J' \}, \quad (11)$$

mit

$$J' = \{ (2m)^2 (\sigma^1 \cdot \sigma^2) + (\sigma^1 \cdot \text{grad}^1)(\sigma^2 \cdot \text{grad}^2) \} J.$$

Wie H. GAUS zeigte, erhält man aus den HARTREE-FOCKSchen Gleichungen für das effektive, in einem Kern auf ein zusätzliches Nukleon wirkende Potential:

$$V_{eff} \psi_p = \sum_m \{ (\cdot m | V_{12} | \cdot m) \psi_p - (\cdot m | V_{12} | \cdot p) \psi_m \}, \quad (12)$$

wobei

$$(\cdot m | V_{12} | \cdot p) = \int \psi_m^*(q) V_{12} \psi_p(q) dq \quad (13)$$

und q für Orts-, Spin- und Ladungsvariable steht. Wir zerlegen ψ in seine Raum-, Spin- und Ladungsfunktion:

$$\psi = \Phi(x) u w, \quad (14)$$

Wir betrachten nun als Beispiel einen Kern mit gleichgroßer Protonen-, bzw. Neutronenzahl und berechnen das auf ein zusätzliches Nukleon wirkende Potential. Das zusätzliche Nukleon möge positive Spin- und Ladungsfunktion haben. Es wird durch den Index p gekennzeichnet. Gl. (11) enthält Terme der Gestalt:

$$(\sigma^1 \cdot \sigma^2), \quad (\sigma^1 \cdot A) (\sigma^2 \cdot B), \quad (\sigma^2 \cdot A) (\sigma^1 \cdot B).$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} (u_+^2 | (\sigma^1 \cdot \sigma^2) | u_+^2) u_+^1 &= u_+^1, & (u_-^2 | (\sigma^1 \cdot \sigma^2) | u_-^2) u_+^1 &= -u_+^1, \\ (u_-^2 | (\sigma^1 \cdot \sigma^2) | u_+^2) u_-^1 &= 2 u_+^1, \end{aligned}$$

so daß

$$\sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^1 \cdot \sigma^2) J | \cdot m') \psi_p = 0, \quad (15 a)$$

$$\sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^1 \cdot \sigma^2) J | \cdot p) \psi_{m'} = 3 \sum_{m'} (\cdot m' | J | \cdot p) \Phi_{m'} u_p w_{m'}. \quad (15 b)$$

Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^1 \cdot A) (\sigma^2 \cdot B) | \cdot m') \psi_p = \\ &= \sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^2 \cdot A) (\sigma^2 \cdot B) | \cdot m') \psi_p = 0, \end{aligned} \quad (16 a)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^1 \cdot A) (\sigma^2 \cdot B) | \cdot p) \psi_{m'} = \\ &= \sum_{m'} (\cdot m' | (A \cdot B) + i ([A, B] \cdot \sigma) | \cdot p) \Phi_{m'} u_p w_{m'}, \end{aligned} \quad (16 b)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m'} (\cdot m' | (\sigma^2 \cdot A) (\sigma^1 \cdot B) | \cdot p) \psi_{m'} = \\ &= \sum_{m'} (\cdot m' | (A \cdot B) - i ([A, B] \cdot \sigma) | \cdot p) \Phi_{m'} u_p w_{m'}. \end{aligned} \quad (16 c)$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} (w_+^2 w_+^2) w_+^1 &= w_+^1, & (w_-^2 w_+^2) w_-^2 &= 0, \\ (w_+^2 | (\tau^1 \cdot \tau^2) | w_+^2) w_+^1 &= w_+^1, & (w_-^2 | (\tau^1 \cdot \tau^2) | w_+^2) w_-^1 &= 2 w_+^1, \end{aligned}$$

so daß die Summation über die Ladungsfunktionen $w_{m'} \rightarrow w_p$, bzw. $3 w_p$ ergibt, je nachdem, ob wir bezüglich der Ladungsabhängigkeit eine neutrale oder eine symmetrische Theorie annehmen. Die symmetrische Theorie unterscheidet sich von der neutralen Theorie somit nur um den

Faktor 3, so daß wir uns auf diese beschränken können. Wir haben daher nur mehr die Raumabhängigkeit zu betrachten, welche wir durch partielle Integration umformen:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m'} \int \Phi_{m'}^*(x^2) V \Phi_p(x^2) \Phi_{m'} dx^2 = \\
 & = \sum_{m'} \int \Phi_{m'}^*(x^2) \{ (12 m^2 + \Delta) J + 2 (V^1 J \cdot V^2) + 2 (V^2 J \cdot V^1) + \\
 & + 2 i ([V^1 J, V^2] \cdot \sigma) - 2 i ([V^2 J, V^1] \cdot \sigma) \} \Phi_p^*(x^2) \Phi_{m'}(x^1) dx^2 = \\
 & - \sum_{m'} \int \Phi_p(x^2) \{ (12 m^2 + \Delta) J - 2 (V^1 J \cdot V^2) - 2 (J \cdot V^2 \cdot V^1) - \\
 & - 2 i ([V^1 J, V^2] \cdot \sigma) + 2 i (J \cdot V^2, V^1] \cdot \sigma) \} \Phi_{m'}^*(x^2) \Phi_{m'}(x^1) dx^2 = \\
 & = \frac{1}{4 \varrho_p(x^1)} \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) \{ J_1 - 2 i (\sigma \cdot [\text{grad}^1 J + \\
 & 2 J V^1, V^2]) \} \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2, \quad (17)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (12 m^2 + \Delta) J - 2 (V^1 J \cdot V^2) - 2 J (V^1 \cdot V^2), \\
 \tilde{\varrho}(x^1, x^2) &= 4 \Phi_i^*(x^1) \Phi_i(x^2), \quad \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) = \Phi_p^*(x^1) \Phi_p(x^2), \\
 \varrho_p(x^1) &= \tilde{\varrho}_p(x^1, x^1); \quad (18)
 \end{aligned}$$

Um den Spin-Term in Gl. (17) auszuwerten, betrachten wir zunächst den Fall, daß x^1 und x^2 zwei innere Punkte des Kerns sind, dann läßt sich $\tilde{\varrho}$ als Summe ebener Wellen $e^{i k \cdot (x^1 - x^2)}$ darstellen, so daß

$$i [\text{grad}^1 J + 2 J V^1, V^2] \tilde{\varrho} = -i [\text{grad}^1 J - 2 J V^1, V^1] \tilde{\varrho} = [\text{grad}^1 J, p^1]. \quad (19)$$

Liegt x^2 an der Kernoberfläche, so kann wegen des steilen Abfalles der Kerndichte und des Potentials $\Phi_p(x^2)$ durch eine ebene Welle $e^{i p^1 x^2}$ angenähert werden, so daß man den Spinterm in Gl. (17) durch partielle Integration umformen kann:

$$\begin{aligned}
 & i \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) [\text{grad}^1 J + 2 J V^1, V^2] \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2 = \\
 & = \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) [\text{grad}^1 J + 2 J V^1, p^1] \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2 = \\
 & = \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) [\text{grad}^1 J \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2, p^1] + \\
 & + 2 \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) J [\text{grad}^1 \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2, p^1]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Die Beiträge von Gl. (19) und (20) ergeben

$$2 \text{grad}^1 \frac{\int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) J \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2}{\varrho_p(x^1)} \times p^1. \quad (21)$$

Das effektive Potential lautet somit im C.G.S.-System:

$$U_{eff} = U + U_{Sp.B.}, \quad (22)$$

mit

$$U = \left(\frac{j \hbar}{4 m c} \right)^2 \frac{1}{q_p(x^1)} \int \tilde{\varrho}_p(x^1, x^2) J_1 \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2, \quad (23)$$

$$U_{Sp.B.} = - \left(\frac{j \hbar}{2 m c} \right)^2 \hbar \operatorname{grad} \int \frac{\tilde{\varrho}(x^1, x^2) J \tilde{\varrho}(x^2, x^1) dx^2}{q_p(x^1)} \times p^1 \cdot \sigma^1. \quad (24)$$

Schreiben wir $U_{eff} = U - B \operatorname{grad} U \times p \cdot \sigma$, so erhalten wir wegen

$$J_1 \approx 3 \left(\frac{2 m c}{\hbar} \right)^2 J \text{ für die Konstante } B:$$

$$B = \frac{4 \hbar}{3 m^2 c^2}. \quad (25)$$

Dieses Ergebnis gibt die vom Experiment geforderte Spin-Bahn-Kopplung qualitativ richtig wieder. Außerdem ergibt sich das richtige Vorzeichen automatisch, da dieses wegen der Verwendung einer Kopplung festgelegt ist. Quantitativ ist Gl. (25) um den Faktor 7,5 zu klein [1]. Dies rührt daher, daß der berechnete Beitrag durch höhere Näherungen in der Kopplungskonstanten und durch Beiträge schwerer Mesonen modifiziert wird.

Herrn Dr. W. THIRRING möchte ich für die Themenstellung und Herrn cand. phil. H. GAUS für die Förderung der Arbeit herzlich danken.

Literatur.

- [1] H. GAUS, ZS. f. Naturf. 7 a, 44 (1952).
- [2] R. BECKER, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-naturwiss. Kl. 1949, 20.

Eine einfache Herleitung der Streuformel von Bhabha.

Von

Kurt Baumann, Wien.

(Eingelangt am 27. Oktober 1952.)

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Positronen an freien Elektronen wurde erstmals von BHABHA¹ berechnet. Vom Verfasser wurde die Ableitung der MÖLLERSchen Streuformel mit den Methoden der neuen Strahlungstheorien von TOMONAGA, SCHWINGER und FEYNMAN angegeben². Mit ihrer Hilfe kann man auch die Formel von BHABHA außerordentlich rasch verifizieren.

Bleiben wir bei der Bezeichnungsweise von ². $v e^{-iqx}$, $v' e^{-iq'x}$ bedeute nun die Wellenfunktion des Positrons vor und nach der Streuung. Der einzige Unterschied gegenüber der Elektronenstreuung besteht darin, daß für Positronen ψ Erzeugungsoperator, $\bar{\psi}$ Vernichtungsoperator ist. Im Wirkungsquerschnitt (6,14) der erwähnten Arbeit ist also bloß q und q' in den Spuren zu vertauschen. Es kommt dann mit (6.19), (6.19') und (6.21)

$$\sigma = \frac{2e^4}{V(pq)^2 - m^4} \int_{p_0' > 0} \frac{dp'}{(2\pi)^2} \delta(p'^2 - m^2) \delta(q'^2 - m^2) \\ \{ (p - p')^{-4} [(pq)^2 + 2m^2 pq + (pq')^2 - 2m^2 pq'] + \\ + (p - q)^{-4} [(pp')^2 + 2m^2 pp' + (pq')^2 - 2m^2 pq'] + \\ + 2(p - p')^{-2} (p - q)^{-2} [(pq')^2 - 2m^2 pq'] \}. \quad (1)$$

wo nunmehr statt (6.12)

$$.q' = p' - p + q. \quad (2)$$

Es ist zu beachten, daß $u e^{-ikx}$ mit $k_0 < 0$ ein Positron mit dem Energieimpulsvektor $-k$ darstellt. In Gl. (1) ist also p , p' der Energieimpulsvektor des Elektrons vor- und nachher, der des Positrons aber $-q$ und $-q'$.

Dies hat zur Folge, daß nun $-q = (p_0, -p)$ im Schwerpunktsystem, genau wie vorher $+q$. Die Resultate (6.25), (6.26) bleiben daher auch für die δ -Funktionen in Gl. (1) gültig.

¹ H. J. BHABHA, Proc. Roy. Soc. A, **154**, 195 (1936).

² K. BAUMANN, Acta Phys. Austr. VI, 195 (1952).

Mit

$$z = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (3)$$

ist

$$(\hat{p} - \hat{p}')^2 = 4 |\mathbf{p}|^2 z;$$

ferner

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \kappa m^2,$$

$$(\hat{p} - \hat{q})^2 = 2 m^2 (\kappa - 1),$$

$$\hat{p} \cdot \hat{p}' = m^2 [1 + (\kappa - 1) z], \quad \hat{p} \cdot \hat{q}' = -m^2 [\kappa - (\kappa - 1) z];$$

aus $|\mathbf{p}|^2 = \frac{(m \kappa \beta)^2}{2(\kappa + 1)}, \quad \kappa^2 \beta^2 = \kappa^2 - 1$ folgt

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{1}{2} m^2 (\kappa - 1).$$

Setzt man dies in den Klammerausdruck von Gl. (1) ein, dann erhält man $(m/2 |\mathbf{p}|)^4$ mal

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^2} [\kappa^2 - 2 \kappa (\kappa - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2 + 2 \kappa - 2 (\kappa - 1) z + \kappa^2 - 2 \kappa] \\ & + [\kappa^2 - 2 \kappa (\kappa - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2 + 2 \kappa - 2 (\kappa - 1) z + \\ & + 1 + 2 (\kappa - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2 + 2 + 2 (\kappa - 1) z] \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{z} [\kappa^2 + 2 \kappa - 2 (\kappa^2 - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2] \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Damit kommt als Endergebnis

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\pi \alpha^2}{m^2} \frac{dz}{2 (\kappa - 1)^2 (\kappa + 1)} \left\{ \frac{1}{z^2} [2 \kappa^2 - 2 (\kappa^2 - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2] \right. \\ & + \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^2 [\kappa^2 + 2 \kappa + 3 - 2 (\kappa - 1)^2 z + 2 (\kappa - 1)^2 z^2] \\ & \left. - 2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{z} [\kappa^2 + 2 \kappa - 2 (\kappa^2 - 1) z + (\kappa - 1)^2 z^2] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

also die Formel von BHABHA.

Zur Definition der relativistischen Teilchen-Antiteilchen-Wellenfunktion.

Von

Kurt Baumann.

Institut für Theoretische Physik der Universität Wien.

Eine Streubetrachtung nach dem Vorbild SALPETERS und BETHES legt nahe, daß nur die relativistische Zwei-Teilchen-Wellenfunktion von KARPLUS und KLEIN, nicht aber jene von SCHWINGER und SALPETER-BETHE für die Beschreibung von Bindungszuständen eines Fermions mit einem Antifermion derselben Teilchensorte in Betracht kommt.

Die Bewegung eines DIRAC-Teilchens im Vakuum wird durch eine GREENSche Funktion S_+ (12) beschrieben^{1, 2, 3}. Bei Anwesenheit eines vorgegebenen Potentials $A(\xi)$ läßt sich eine Reihenentwicklung für die Fortpflanzungsfunktion angeben,

$$S_+^A(12) = S_+(12) + e S_+(13) \gamma(\xi, 33') A(\xi) S_+(3'2) + \dots \quad (1)$$

Über doppelt auftretende Indizes (Argumente) ist zu summieren, im kontinuierlichen Teil zu integrieren. [Da γ sowohl in den Teilchen- als auch in den Photon-Raumzeitkoordinaten die Einheitsmatrix, also die δ -Funktion ist, bleibt nur eine nichttriviale Integration übrig. Vgl. Fußnote 2, Gl. (5.2).]

Mit diesen Funktionen hängt die Wellenfunktion des Teilchens zusammen durch

$$\psi(1) = S_+(12) \gamma(\xi, 23) \psi(3) N(\xi), \quad (2)$$

wo die Integration nur über eine dreidimensionale, x_1 umschließende Fläche zu gehen hat, oder über zwei raumartige Flächen vor und nach x_1 . N ist die nach innen gerichtete Flächennormale. Ferner gilt für die gestreute Amplitude erster Näherung

$$\psi_1(1) = e S_+(12) \gamma(\xi, 23) A(\xi) \psi_0(3), \quad (3)$$

¹ R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 749 (1949).

² K. BAUMANN, Acta Phys. Austr. VI, 53 (1952).

³ Wir verwenden die Bezeichnungsweise von KARPLUS und KLEIN⁴; Funktionen werden als Matrizen (mit kontinuierlichen Indizes) dargestellt, die Matrixindizes sind Ziffern für die Teilchenfunktionen, ξ, ξ' ... für die Photonfunktionen. In diese werden die Vektorindizes, in jene die Spinorindizes mit einbezogen.

⁴ R. KARPLUS u. A. KLEIN, Phys. Rev. **87**, 848 (1952).

und das Matricelement zu dem Übergang in den Zustand φ ist

$$e\varphi(1)\gamma(\xi, 12)A(\xi)\psi_0(2). \quad (4)$$

Die Zweipartikel-Fortpflanzungsfunktion $G(12, 34)$ ist bei ungekoppelten Teilchen das antisymmetrisierte Produkt der Einteilchenfunktionen; bei elektromagnetischer Kopplung ist das niedrigste Zustandsglied^{5, 6}

$$G_1(12, 34) = S_+(15)S_+(26)I_1(56, 78)S_+(73)S_+(84), \quad (5)$$

$$I_1(12, 34) = ie^2[\gamma(\xi, 13)D_+(\xi\xi')\gamma(\xi', 24) - \gamma(\xi, 14)D_+(\xi\xi')\gamma(\xi', 23)]. \quad (6)$$

Für diese GREENsche Funktion $G(12, 34)$ stellten SALPETER und BETHE^{7, 8} eine Integralgleichung auf. SCHWINGER⁹ gibt einen allgemeinen Kalkül mit GREENschen Funktionen im Rahmen der quantisierten Feldtheorie an und erhält Funktionaldifferentialgleichungen und Integrodifferentialgleichungen für die Einteilchen-GREEN-Funktion unter Berücksichtigung des Selbstfeldes, und für die Zweiteilchen-GREEN-Funktion.

SALPETER und BETHE⁷ nehmen sich nun Gl. (2) zum Vorbild, um eine Zweipartikel-Wellenfunktion zu definieren:

$$\psi(12) = G(12, 34)\gamma(\xi, 35)\gamma(\xi', 46)\psi(56)N(\xi)N(\xi'); \quad (7)$$

wieder wird über dreidimensionale, x_1 , bzw. x_2 unanschließende Flächen integriert. $\psi(12)$ erfüllt die Integrodifferentialgleichung

$$[F(13)F(24) - I(12, 34)]\psi(34) = 0. \quad (8)$$

F ist der Operator der DIRAC-Gleichung¹⁰. I läßt sich graphisch darstellen als die Summe der Mittelstücke aller „irreduziblen“ MÖLLER-Graphen (Fußnote 6, Abb. 1 bis 2). „Irreduzibel“ ist jedoch anders definiert als bei DYSON^{2, 11}. Nur Abb. 2 a der zitierten Arbeit ist nicht irreduzibel im SALPETERSchen Sinn.

Entwickelt man $\psi(12)$ in eine Reihe,

$$\psi(12) = \psi_0(12) + e^2\psi_1(12) + e^4\psi_2(12) + \dots, \quad (9)$$

so muß gelten

$$F(13)F(24)\psi_0(34) = 0, \quad (10 a)$$

$$F(13)F(24)\psi_1(34) = I_1(12, 34)\psi_0(34), \quad (10 b)$$

$$F(13)F(24)\psi_2(34) = I_1(12, 34)\psi_1(34) + I_2(12, 34)\psi_0(34) \quad (10 c)$$

⁵ R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).

⁶ K. BAUMANN, Acta Phys. Austr. VI. 195 (1952).

⁷ E. E. SALPETER u. H. A. BETHE, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).

⁸ M. GELL-MANN u. F. LOW, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).

⁹ J. SCHWINGER, Proc. N. A. S. U. S. **37**, 452, 455 (1951).

¹⁰ Wir nehmen kein äußeres Feld an, so daß der Term in $\langle A \rangle$, bzw. A_+ bei SCHWINGER und KARPLUS und KLEIN verschwindet. $\langle A \rangle$ ist identisch mit dem $A_{e'}$ von DYSON^{11, 2}.

¹¹ F. J. DYSON, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).

und so fort. Gl. (10 a) wird erfüllt durch

$$\psi_0(12) = \chi(1) \eta(2), \quad (11)$$

wenn χ, η zwei Lösungen der Vakuum-DIRAC-Gleichung sind. Da S_+ als GREENSCHE Funktion der DIRAC-Gleichung zu F invers ist, kommt weiterhin

$$\psi_1(12) = S_+(13) S_+(24) I_1(34, 56) \psi_0(56), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(12) = S_+(13) S_+(24) I_1(34, 56) \psi_1(56) + \\ + S_+(13) S_+(24) I_2(34, 56) \psi_0(56). \end{aligned} \quad (13)$$

Multipliziert man (12) mit einer anderen Wellenfunktion $\varphi(12) = \varrho(1) \zeta(2)$, so erhält man das Matricelement niedrigster Ordnung zur MÖLLER-Streuung,

$$\bar{\varphi}(12) I_1(12, 34) \psi_0(34). \quad (14)$$

In (13) entspricht der erste Summand der Abb. 2 a von ⁶, der zweite den restlichen Graphen zweiter Ordnung.

In diesem Formalismus sind die Antiteilchen keine „Löcher“, sondern einfach die besetzten Zustände mit negativer Frequenz. (14) gilt also auch, wenn in ψ_0 und φ eines der Teilchen, etwa η und ζ , durch eine derartige Wellenfunktion beschrieben wird. Wir haben es dann mit der von BHABHA behandelten Streuung von Positronen an Elektronen zu tun. Jedoch, ψ_0 beschreibt dann nicht beide Teilchen vor der Streuung und φ nachher, sondern ψ_0 das Elektron vorher und das Positron nachher, φ das Positron vorher und das Elektron nachher.

Bestimmen wir nun eine Teilchen-Antiteilchen-Wellenfunktion durch die Bedingung, daß sie beide Teilchen vor *oder* nach der Streuung beschreiben soll. Wir bringen dazu die zusammengehörigen Einpartikelwellenfunktionen nebeneinander. Vom ersten Teil von (6) haben wir in (14) zunächst

$$\bar{\zeta}(2) \gamma(24) \eta(4) = \eta(4) \gamma^T(42) \bar{\zeta}(2). \quad (15)$$

Nun gilt

$$\gamma^T = -C^{-1} \gamma C, \quad (16)$$

wo C jene Matrix ist, welche die Rolle der Elektronen und Positronen in der DIRACschen Theorie vertauscht,

$$\psi' = C \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}' = C^{-1} \psi. \quad (17)$$

Die gestrichenen sind die „ladungskonjugierten“ Spinoren¹². C hat die Eigenschaften

$$C^T = -C, \quad C = C^{-1}. \quad (18 \text{ a, b})$$

Es folgt

$$\psi C^{-1} = -C^{-1} \psi = -\bar{\psi}', \quad (19)$$

so daß (15) übergeht in

$$\bar{\eta}'(4) \gamma(42) \zeta'(2). \quad (20)$$

¹² J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); A. PAIS u. R. JOSTY, Phys. Rev. **87**, 871 (1952).

Nun zum Austauschterm in (14):

$$\begin{aligned} & \bar{\varrho}(1) \gamma(\xi, 14) \eta(4) D_+(\xi \xi') \bar{\zeta}(2) \gamma(\xi', 23) \chi(3) \\ &= \bar{\varrho}(1) \eta(4) \gamma^T(\xi, 41) D_+(\xi \xi') \gamma^T(\xi', 32) \bar{\zeta}(2) \chi(3) - \\ &= -\bar{\varrho}(1) \bar{\eta}'(4) \gamma(\xi, 41') C(1' 1) D_+(\xi \xi') C^{-1}(33') \gamma(\xi', 3' 2) \bar{\zeta}'(2) \chi(3). \end{aligned} \quad (21)$$

Aus Gl. (20), (21) ergibt sich: Die Wellenfunktion, welche beim Streuprozess zusammengehörige Teilchen beschreibt, genügt, wenn man die Antiteilchen durch die ladungskonjugierten Spinoren ausdrückt, denselben Beziehungen (8), (10), (14) wie die ursprünglichen Funktionen mit einem veränderten Wechselwirkungsoperator I (12, 34), in erster Näherung

$$I_1(12, 34) = i e^2 [\gamma(\xi, 13) D_+(\xi \xi') \gamma(\xi', 24) + \gamma(\xi, 11') C(1' 2) D_+(\xi \xi') C^{-1}(44') \gamma(\xi', 4' 3)]. \quad (22)$$

Auf den Operator (22) kommen auch KARPLUS und KLEIN⁴, die von vorneherein von dem Matricelement des Operators $T\psi(x_1)\psi'(x_2)$ ausgehen¹³. Hier soll die Zwangsläufigkeit dieser Darstellung hervorgehoben werden. Die Matricelemente von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ sind für die Darstellung von Einteilchenzuständen gleichberechtigt. Das SALPETER-BETHESche $\psi(12)$ hingegen ist *nicht* durch eine Transformation mit jenem von KARPLUS und KLEIN verknüpft.

Die SALPETER-BETHESche Wellenfunktion hat 16 Indizes, also genug Freiheitsgrade, um jedes Spin- und Energievorzeichen jedes der beiden Teilchen zu beschreiben. Die Frage nach der Interpretation der Wellenfunktion zweier gebundener Teilchen mit verschiedenem Energievorzeichen taucht daher auf. Bei Streuprozessen ist diese Interpretation klar. Eine Interpretation als eine gemischte Darstellung der Teilchen vor und nach der Wechselwirkung läßt sich aber auf gebundene Zustände schwer übertragen.

Wir können den einen Schluß ziehen, daß durch die Analogie mit den Streuprozessen — auf diese berufen sich auch SALPETER und BETHE bei der Definition ihrer Wellenfunktion — nur die Verwendung der Wellenfunktion von KARPLUS und KLEIN⁴ zur Beschreibung von Teilchen-Antiteilchen-Bindungszuständen gerechtfertigt ist, nicht aber der Wellenfunktion von SALPETER und BETHE⁷, SCHWINGER⁹ und GELL-MANN und LOW⁸.

¹³ T ist der chronologische Ordnungsoperator von Wick, Phys. Rev. 80, 268 (1950); s. a. ².

Die Geometrie der Winkelverteilung von Kernreaktionen.

Von

Otto Hittmair.

Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

(Eingelangt am 27. Oktober 1952.)

Zusammenfassung.

Es wird die geometrisch-gruppentheoretische Seite einer Kernreaktion vom Typ Absorption-Emission vom physikalischen Teil abgespalten und allgemein behandelt. Über die hiebei verwendeten RACA-Koeffizienten wird eine Übersicht gegeben. Hierauf wird als praktische Anwendung des Formalismus die unelastische Neutronenstreuung an Pb^{204} unter Zugrundelegung des statistischen Kernmodells durchgerechnet.

1. Einleitung.

Das Problem, die Winkelverteilung einer Kernreaktion zu finden, zerfällt immer in zwei Teile. Handelt es sich z. B. darum, die Winkelverteilung $W(\vartheta)$ einer (p, n) -Reaktion zu bestimmen, wo ϑ der Winkel zwischen einfallendem Proton und emittiertem Neutron ist, so wird einerseits das verwendete Kernmodell eine entscheidende Rolle spielen und außerdem natürlich die Art und Energie von absorbiertem und emittiertem Teilchen. Andererseits werden aber auch die rein geometrischen Seiten des Prozesses maßgebend sein. Darunter ist die Vektoraddition von Drehimpulsen mit ihren Auswirkungen auf den das System beschreibenden Zustandsvektor gemeint, sowie die Rotationseigenschaften der vorkommenden Operatoren.

Während nun der erste, sozusagen physikalische Teil des Problems für jeden individuellen Prozeß gesondert betrachtet werden muß, läßt sich der zweite, der geometrische Teil für einen ganz allgemeinen Reaktionstyp mit gruppentheoretischen Mitteln behandeln und in geschlossener Form überblicken. Da die Bedeutung der RACA-Koeffizienten in diesem Rahmen erst in den letzten Jahren voll erkannt wurde^{1,2} und da ihre Verwendung meistens innerhalb eines speziellen Problems erfolgte, erschien es angebracht, dem allgemeinen geometrischen Teil dieser Probleme die vorliegende Übersicht zu widmen.

Was hier für den Reaktionstyp Absorption-Emission gezeigt wird, läßt sich ohne weiteres auf zwei aufeinanderfolgende Emissionen

(Winkelkorrelation im eigentlichen Sinne) anwenden. Auch bei Absorption mit zwei aufeinanderfolgenden Emissionen ist der Formalismus nützlich³. Da man aber in diesem Falle einschränkende Annahmen über die Beobachtungsweise der emittierten Strahlungen machen muß, trägt der Fall zur grundsätzlichen Klärung des mathematischen Apparates wenig bei.

Im letzten Paragraphen wird die unelastische Neutronenstreuung am Pb^{204} behandelt, um dem Formalismus eine praktische Anwendung zu geben und seine Stellung neben dem physikalischen Teil abzuzeichnen.

2. Die Trennung in geometrische und physikalische Größen.

Die Winkelverteilungsfunktion $W(\vartheta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß die emittierte Strahlung mit der einfallenden einen Winkel ϑ einschließt. Die Energie der einfallenden Strahlung ist dabei fixiert gedacht. Da es sich um eine relative Wahrscheinlichkeit handelt, das heißt darum, wievielmals ein Winkel ϑ wahrscheinlicher ist als ein anderer, kann man alle winkelunabhängigen Faktoren in dieser Funktion weglassen. Davon wird ohne weitere Erwähnung Gebrauch gemacht werden. Will man jedoch aus $W(\vartheta)$ durch Integration über ϑ den totalen Wirkungsquerschnitt der Reaktion berechnen, so muß man sich dieser gestrichenen Faktoren wieder erinnern, da sie energieabhängig sind.

Wir betrachten den Reaktionstyp



Eine Partikel (oder ein Lichtquant) b reagiert mit einem Kern B . Daraufhin wird eine Partikel c ausgesandt und ein Kern C bleibt zurück. Der Bahndrehimpuls des Systems (gemessen im Schwerpunktsystem) vor der Reaktion und der Spin der Partikel b seien zur Quantenzahl L_1 zusammengefaßt. L_1 addiert zum Spin i_1 des Kernes B ergibt den Gesamtdrehimpuls des Systems. Er wird mit i bezeichnet und stellt den Spin des COMPOUND-Kernes dar. Bei dessen Auseinanderbrechen in C und c zerfällt i in i_2 und L_2 .

Die Wechselwirkungshamiltonfunktion für b und B sei H_1 , die für C und c H_2 . Ohne die explizite Form der HAMILTON-Funktion zu kennen, kann man Gebrauch von ihrer Invarianz bezüglich Rotation machen. H_1 muß sich als inneres Produkt oder als Summe von inneren Produkten irreduzibler Tensoren schreiben lassen. Ein irreduzibler Tensor T_M^L vom Rang L ist ein System von $2L + 1$ Größen ($-L \leq M \leq L$), die sich unter dreidimensionaler Rotation gemäß D^L transformieren. D^L ist die irreduzible $(2L + 1)$ -dimensionale Darstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe.

Der eine Tensor $T_{M_1}^{L_1}(A_i)$ des inneren Produkts ist eine Funktion der Vektoren A_i , die das Teilchen b nach Impuls, Spin und Bahndrehmoment beschreiben. Sein Rang ist offenbar L_1 , da er für den Übergang $i_1 \rightarrow i$ verantwortlich ist. Das gleiche gilt für $T_{M_1}^{L_1}(X_i)$, den anderen

Tensor des Produkts, dessen Argumente X_i Kernoperatoren von B vorstellen. L_1 ist also der Beschränkung $|i_1 - i| \leq L_1 \leq i_1 + i$ unterworfen. M_1 ist die z -Komponente von L_1 , m_1 die von i_1 usw. und es gilt natürlich

$$m_1 + M_1 = m \quad \text{und} \quad m_2 + M_2 = m. \quad (1)$$

So hat man schließlich

$$H_1 = \sum_{L_1 M_1} T_{M_1}^{L_1}(A_i) T_{M_1}^{L_1}(X_i) \quad (2)$$

und analog

$$H_2 = \sum_{L_2 M_2} T_{M_2}^{L_2}(A_i) T_{M_2}^{L_2}(X_i).$$

Nun legen wir die z -Achse unseres Koordinatensystems in die Richtung der einfallenden Strahlung und schreiben nun H_1 als

$$H_1 = \sum_{L_1 \mu_1} k_{L_1 \mu_1}(A_i) T_{\mu_1}^{L_1}(X_i).$$

Für H_2 erhält man mit Hilfe der $(2L_2 + 1)$ -dimensionalen irreduziblen Darstellung D^{L_2}

$$H_2 = \sum_{L_2 M_2 \mu_2} k_{L_2 \mu_2} T_{M_2}^{L_2} D_{M_2 \mu_2}^{L_2} (0 \vartheta 0).$$

Die EULERSchen Winkel sind nun so gewählt, daß nur ϑ auftritt.

Da die relative Wahrscheinlichkeit für die Reaktion durch

$$W = \sum_{m_1 m_2} \left| \sum_{im} (i_1 m_1 | H_1 | i m) (i_2 m_2 | H_2 | i m) \right|^2 \quad (3)$$

gegeben ist, hat man nun

$$\begin{aligned} W(\vartheta) &= \sum_{m M \mu} \sum_{L i i'} k_{L_1 \mu_1}^* k_{L_1' \mu_1} k_{L_2 \mu_2}^* k_{L_2' \mu_2} \\ &\times (i_1 m_1 | T_{\mu_1}^{L_1} | i m)^* (i_1 m_1 | T_{\mu_1'}^{L_1'} | i' m) (i_2 m_2 | T_{\mu_2}^{L_2} | i m)^* \\ &\times (i_2 m_2 | T_{\mu_2'}^{L_2'} | i' m) D_{M_2 \mu_2}^{L_2} (0 \vartheta 0)^* D_{M_2' \mu_2'}^{L_2'} (0 \vartheta 0). \end{aligned} \quad (4)$$

Die Aufspaltung der Tensoren $T_M^L(A_i)$ in $k_{L\mu}$ und $D_{M\mu}^L$ stellt den ersten Schritt dar, die geometrischen Eigenschaften des Problems herauszuheben. Der Winkel ϑ kommt nun explizit in den Darstellungen D^{L_2} vor. Durch die Wahl der z -Achse wurde $D_{M_1 \mu_1}^{L_1} (0 0 0) = \delta_{M_1 \mu_1}$.

Die Summen über μ , L , i und i' sind nicht geometrischen Charakters, das heißt, sie lassen sich gruppentheoretisch nicht weiter vereinfachen. Die Gewichte verschiedener L -, i - und μ -Werte sind durch das verwendete Kernmodell und die physikalische Natur der betreffenden Strahlung gegeben. Dagegen sind die Summen über die m -Zahlen und M_2 durch die Geometrie des Problems bestimmt und lassen sich daher auch im allgemeinen Fall ausführen.

Dazu ist es nötig neben den Transformationseigenschaften der Tensoren auch die m -Abhängigkeit ihrer Matrixelemente herauszuheben.

Ist J der totale Drehimpuls eines Systems und ist die HAMILTON-Funktion H des Systems rotationssymmetrisch, so sind $2J + 1$ Eigenfunktionen Ψ_M^J vorhanden, die sowohl Eigenfunktionen des Operators J^2 mit den Eigenwerten $J(J + 1)$ sind, als auch Eigenfunktionen von J_z mit den Eigenwerten M , als auch Eigenfunktionen von H mit dem Eigenwert E . Bei einer dreidimensionalen Drehung des Koordinatensystems transformieren sich diese Ψ_M^J irreduzibel gemäß der Darstellung D^J der Drehungsgruppe. Nur diese Transformationseigenschaft der Ψ_M^J ist es, die nun benützt werden soll, mag der radiale Teil aussehen wie immer.

Ein Operator T_M^L , der bei Rotation gemäß D^L transformiert, ruft in der Drehimpulsquantenzahl und in der magnetischen Quantenzahl — die Änderung in den anderen Quantenzahlen wird nicht eigens vermerkt — den Übergang $i, m \rightarrow i', m'$ hervor. Das betreffende Matrixelement stellt sich dann also als

$$(i\ m | T_M^L | i'\ m') = (\Psi_m^i, T_M^L \Psi_{m'}^{i'})$$

dar. Alle Faktoren dieses Produkts transformieren bei Rotation als Basisvektoren der entsprechenden irreduziblen Darstellungen der dreidimensionalen Drehungsgruppe. Dies allein genügt, um aus dem Produkt den m -abhängigen Teil vom radialen Teil zu trennen⁴ und man erhält für diesen die wohlbekannten CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten⁵ für die Vektoraddition von Drehmomenten. Wir schreiben also

$$(i\ m | T_M^L | i'\ m') = (i | T^L | i') (i\ L\ m\ M | i'\ m')$$

und haben damit die physikalische Größe $(i | T^L | i')$ von der geometrischen $(i\ L\ m\ M | i'\ m')$ getrennt.

3. Racah-Koeffizienten.

Die Funktion $W(\vartheta)$ kann nun in physikalische und geometrische Größen getrennt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} W(\vartheta) = & \sum_{i\ i' L \mu} \sum_{m\ M} k_{L_1 \mu_1}^* k_{L_1' \mu_1} k_{L_2 \mu_2}^* k_{L_2' \mu_2} (i_1 | T^{L_1} | i)^* \\ & \times (i_1 | T^{L_1'} | i') (i_2 | T^{L_2} | i)^* (i_2 | T^{L_2'} | i') (i_1\ L_1\ m_1\ \mu_1 | i\ m) \\ & \times (i_1\ L_1'\ m_1\ \mu_1 | i'\ m) (i_2\ L_2\ m_2\ M_2 | i\ m) (i_2\ L_2'\ m_2\ M_2 | i'\ m) \\ & \times D_{M_2 \mu_2}^{L_2} (0\ \vartheta\ 0)^* D_{M_2' \mu_2}^{L_2'} (0\ \vartheta\ 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Mit den Summationsindizes L, μ, m, M sind immer sowohl L_1 als auch L_2 usw. gemeint.

Bevor wir nun im geometrischen Teil die Summen über die geometrischen Quantenzahlen m und M ausführen, sei noch das Darstellungsprodukt mit Hilfe der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten ausreduziert:

$$D_{M\mu}^L * D_{M\mu}^{L'} = (-1)^{M-\mu} \sum_{\nu=|L-L'|}^{L+L'} (L L' - M M - \nu 0) D_{00}^{\nu} (L L' - \mu \mu | \nu 0), \quad (6)$$

wo

$$D_{00}^{\nu} (0 0 0) = P_{\nu} (\cos \vartheta).$$

Auf die nun verbleibenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten wird RACAHS Summierungsregel⁶ angewendet. In seinen Untersuchungen über komplexe Atomspektren entwickelte RACAH eine Geometrie irreduzibler Tensoroperatoren. Dabei gelang es ihm, die Summe der Produkte von vier miteinander verknüpften CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten, bei der sich die Summierung über alle magnetischen Quantenzahlen erstreckt, auszuführen, das heißt durch einen Ausdruck wiederzugeben, der keine magnetischen Quantenzahlen mehr enthält. Diese RACAH-Koeffizienten erfüllen verschiedene Symmetriebeziehungen und andere Bedingungen, die im folgenden gebracht werden sollen⁷.

1. Definition der RACAH-Koeffizienten.

$$\begin{aligned} W(a b c d, e f) &= \Delta(a b e) \Delta(c d e) \Delta(a c f) \Delta(b d f) \quad (7) \\ &\times \sum_z (-1)^z \frac{(a+b-c-z)! (a+b-c+z)!}{(a+b-e-z)! (c+d-e-z)! (a+c-f-z)!} \\ &\frac{(b+d-f-z)!}{(b+d-f+z)!} \frac{(e+f-a-d+z)!}{(e+f-b-c+z)!} \\ \Delta(a b e) &\equiv \left[\frac{(a+b-e)! (a-b+e)! (-a+b+e)!}{a+b+c+1} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

z nimmt alle möglichen ganzzahligen Werte einschließlich Null an. W ist definiert für alle halb- und ganzzahligen Werte seiner Argumente mit der Einschränkung, daß die Triaden $(a b c)$, $(c d e)$, $(a c f)$ und $(b d f)$ ganzzahlige Summe haben. Die Summe über z verschwindet, wenn nicht jede der Triaden eine Dreiecksungleichung erfüllt. Dies wird sich als eine Einschränkung der Anisotropie von $W(\vartheta)$ auswirken. Wenn der Flächeninhalt von einem dieser Dreiecke verschwindet, bleibt von der Summe nur ein nichtverschwindendes Glied übrig.

2. Die Summierungsregel.

Bei Beachtung der Regeln für die CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten läßt sich die Summierungsregel am einfachsten schreiben als

$$W(a b c d, e f) = \frac{1}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}} \sum_{\alpha\beta} (a b \alpha \beta | e \alpha + \beta) \quad (8)$$

$$\times (e d \alpha + \beta \delta | c \alpha + \beta + \delta) (b d \beta \delta | f \beta + \delta) (a f \alpha \beta + \delta | c \alpha + \beta + \delta).$$

Verschiedene Umformungen sind möglich. Für die vorliegende Anwendung kommt folgende Form zustatten:

$$\begin{aligned}
 & (a f a \gamma - a | c \gamma) W(a b c d, e f) = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}} \sum_{\beta} (a b a \beta | e a + \beta) \\
 & (e d a + \beta \gamma - a - \beta | c \gamma) (b d \beta \gamma - a - \beta | f \gamma - a) \quad (9)
 \end{aligned}$$

3. Symmetriebeziehungen der RACAH-Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
 W(a b c d, e f) &= W(b a d c, e f) = W(c d a b, e f) = W(a c b d, f e) = \\
 &= (-)^{e+f-a-d} W(e b c f, a d) = (-)^{e+f-b-c} W(a e f d, b c)
 \end{aligned}$$

4. Orthonormalität.

$$\sum_e (2e+1)(2f+1) W(a b c d, e f) W(a b c d, e g) = \delta_{fg}$$

Zum Schluß seien noch die Symmetriebeziehungen der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten in der von RACAH⁶ benützten Form wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
 & (a b a \beta | c \gamma) = (-)^{a+b-\gamma} \sqrt{2c+1} V(a b c, a \beta - \gamma) \\
 V(a b c, a \beta \gamma) &= (-)^{a+b-c} V(b a c, \beta a \gamma) = (-)^{a+b+c} V(a c b, a \gamma \beta) = \\
 &= (-)^{a+b+c} V(a b c, -a - \beta - \gamma)
 \end{aligned}$$

Die Nützlichkeit der RACAH-Koeffizienten für Korrelationsbetrachtungen zweier aufeinanderfolgender Strahlungen wurde zuerst von GARDNER¹ erkannt. Da sie nichtsdestoweniger als algebraische Funktionen recht unhandlich sind, ist ihre numerische Tabellierung⁷ von großem Vorteil.

Mit Hilfe der uns nun zur Verfügung stehenden Hilfsmittel und bei Beachtung von Gl. (6) läßt sich der geometrische Teil von $W(\vartheta)$ durch zweimaliges Anwenden von Gl. (9) ausdrücken als

$$\begin{aligned}
 W(\vartheta) &= \sum_{L \mu i i' \nu} \Phi_{L \mu i} (-)^{i_2 - i_1 + L_1 + L'_1 + L_2 + L'_2 - (\mu_1 + \mu_2) - \nu} (2i+1)(2i'+1) \\
 &\times (L_1 L'_1 - \mu_1 \mu_1 | \nu 0) (L_2 L'_2 - \mu_2 \mu_2 | \nu 0) W(L_1 i L'_1 i', i_1 \nu) \\
 &\times W(L_2 i L'_2 i', i_2 \nu) P_{\nu}(\cos \vartheta). \quad (10)
 \end{aligned}$$

$\Phi_{L \mu i}$ bedeutet die physikalischen Größen, die sich hier als verschiedene Gewichte verschiedener L -, μ - und i -Werte ausdrücken.

4. Unelastische Neutronenstreuung an Pb^{204} .

Um eine praktische Anwendung des hier entwickelten Apparates zu zeigen, sei die Winkelverteilung der unelastischen Neutronenstreuung an Pb^{204} behandelt. Dabei wird das statistische Kernmodell^{8,9} zu Grunde gelegt, das in diesem Falle gute Ergebnisse erzielen sollte. Der Annehmlichkeit halber fassen wir den Spin des einfallenden Neutrons mit dem Spin des Pb -Grundzustandes zum Spin j_1 des Eingangskanals zusammen und den Spin des emittierten Neutrons mit dem Spin des

angeregten Pb^{204} zum Spin j_2 des Ausgangskanals. Der Bahndrehimpuls l , der nun an die Stelle von L tritt, ist stets ganzzahlig. Gl. (10) wird somit zu

$$W(\vartheta) = \sum_{i i' l j \nu} \Phi_{l j i} (-)^{\nu} (2i+1) (2i'+1) (l_1 l_1' 0 0 | \nu 0) (l_2 l_2' 0 0 | \nu 0) \\ \times W(l_1 i l_1' i', j_1 \nu) W(l_2 i l_2' i', j_2 \nu) P_{\nu}(\cos \vartheta). \quad (11)$$

Beim statistischen Modell treten weder Interferenzen von l noch von i auf. ν ist gerade und man erhält

$$W(\vartheta) = \sum_{i l j \nu} \Phi_{l j i} (2i+1)^2 (l_1 l_1 0 0 | \nu 0) (l_2 l_2 0 0 | \nu 0) \\ \times W(l_1 i l_1 i, j_1 \nu) W(l_2 i l_2 i, j_2 \nu) P_{\nu}(\cos \vartheta).$$

Nun soll die physikalische Größe $\Phi_{l j i}$ bestimmt werden.

Der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkernes ist für die l_1 -Komponente der einfallenden Strahlung für einen beliebigen der möglichen Eingangskanäle gegeben durch

$$\sigma^e(l_1) = (2l_1 + 1) \pi \lambda^2 T_{l_1}(E_1).$$

Die Transmission $T_{l_1}(E_1)$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, daß die Partikel b in den Bereich des Kernes B eindringt. Eine schematische Abschätzung der Energieverteilung der Nukleonen im Inneren des Kernes und die Annahme eines Potentials, aus dem diese Energieverteilung folgt, ermöglichen es, $T_l(E)$ zu berechnen⁸. Die Größe ist natürlich auch vom Radius des Kernes B abhängig und nimmt mit wachsender Energie für ein gegebenes l gegen 1 hin zu. Kurven von $T_l(E)$ für Neutronenstrahlung sind vorhanden.

Die relative Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des Compoundkernes ist für die l_2 -Komponente der emittierten Strahlung bei einem beliebigen der möglichen Ausgangskanäle gegeben durch

$$G(l_2) = \frac{T_{l_2}(E_2)}{\sum_{l_2' E_2' j_2'} T_{l_2'}(E_2')},$$

wobei in der Summe im Nenner alle möglichen Kanäle, alle möglichen Erregungszustände des Kernes C und die dazu möglichen Bahndrehimpulse der emittierten Strahlung zu berücksichtigen sind.

$\Phi_{l j i}$ wird also mit der statistischen Annahme zu

$$\Phi_{l j i} \equiv \pi \lambda^2 (2l_1 + 1) \cdot \frac{T_{l_1}(E_1) \sum_{l_2} T_{l_2}(E_2)}{\sum_{l_2' E_2' j_2'} T_{l_2'}(E_2')}.$$

Wir setzen die Energie E_1 der einfallenden Neutronen mit 540 keV fest. Nur das Niveau 374 keV mit dem Spin 2 und gerader Parität wird angeregt. Der Grundzustand hat Spin 0 und ebenfalls gerade Parität. Die möglichen l_1 -Werte sind 1 und 2. 0 kommt deshalb nicht

in Frage, weil sich die l_2 -Werte auf 0 und 1 beschränken. Die möglichen Spinzahlen des Compound-Kernes sind $i = 1/2 -$, $3/2 +$, $3/2 -$ und $5/2 +$. Durch die Dreiecksungleichungen, die für die RACAH-Koeffizienten gelten, wird ν auf Werte $\leq 2l_1$, $2i$, $2l_2$ beschränkt. Außerdem muß ν wegen der verbliebenen CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten gerade sein, da diese sonst verschwinden.

So hat man schließlich

$$\begin{aligned}
 W(\vartheta) = & 3 T_1(E_1) \frac{T_1(E_2)}{T_1(E_2) + T_1(E_1)} \left\{ 4 (1100|00)^2 W \left(1 \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}, \frac{1}{2} 0 \right) \right. \\
 & \times W \left(1 \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}, \frac{3}{2} 0 \right) P_0 + 16 \sum_{\nu=0,2} (1100|\nu 0)^2 W \left(1 \frac{3}{2} 1 \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \nu \right) \\
 & \times \frac{T_1(E_2) + T_1(E_1)}{2 T_1(E_2) + T_1(E_1)} \left[W \left(1 \frac{3}{2} 1 \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \nu \right) + W \left(1 \frac{3}{2} 1 \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \nu \right) \right] P_\nu \Big\} + \\
 & - 5 T_2(E_1) \frac{T_0(E_2)}{T_0(E_2) + T_2(E_1)} \left\{ 16 (2200|00) W \left(2 \frac{3}{2} 2 \frac{3}{2}, \frac{1}{2} 0 \right) \right. \\
 & \times W \left(0 \frac{3}{2} 0 \frac{3}{2}, \frac{3}{2} 0 \right) - 36 (2200|00) W \left(2 \frac{5}{2} 2 \frac{5}{2}, \frac{1}{2} 0 \right) \\
 & \times W \left(0 \frac{5}{2} 0 \frac{5}{2}, \frac{5}{2} 0 \right) \Big\} P_0.
 \end{aligned}$$

Mit

$T_1(E_1) = 0,30$, $T_2(E_1) = 0,09$, $T_0(E_2) = 0,22$ und $T_1(E_2) = 0,05$ wird das zu

$$W(\vartheta) = 1 + 0,23 P_2(\cos \vartheta).$$

Wenn man sich vor Augen hält, welche enorme Vereinfachung die RACAH-Koeffizienten mit sich brachten, so wird man sich einen Begriff davon machen können, wie kompliziert erst die Berechnung einer Winkelverteilung ohne ihre Anwendung wäre.

Der Autor möchte dem Schriftleiter der Acta Physica Austriaca, Herrn Prof. Dr. P. URBAN, seinen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit aussprechen.

Literatur.

1. J. W. GARDNER, Proc. Phys. Soc. (London) **62** A, 763 (1949).
2. J. M. BLATT und L. C. BIEDENHARN, Phys. Rev. **82**, 123 (1951).
3. L. C. BIEDENHARN, G. B. ARFKEN und M. E. ROSE, Phys. Rev. **83**, 586 (1951).
4. E. WIGNER, Die Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Atom-spektren, Braunschweig (1931).
5. Sie werden hier in der normierten Form von CONDON and SHORTLEY, Theory of Atomic Spectra, Cambridge (1935) verwendet.
6. G. RACAH, Phys. Rev. **62**, 438 (1942).
7. S. a. ORNL Report 1098.
8. H. FESHBACH und F. W. WEISSKOPF, Phys. Rev. **76**, 1550 (1949).
9. O. HITTMAIR, Phys. Rev. **87**, 375 (1952).
10. Nyo Report 636.

Dynamik des spröden Zugbruches von zylindrischen Glasstäben¹.

Von

Adolf G. Smekal

wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 3. November 1952.)

§ 1. Einleitung. Bruchmechanik und Stoffeigenschaften.

Die Abhängigkeit der „statischen“ Zugfestigkeit von der Geschwindigkeit der Spannungszunahme während des Zugversuches ist zuerst bei Silikatgläsern gefunden und genauer untersucht worden (SMEKAL, 1936). Im Gegensatz zu Metallen sind bei diesen anorganischen, aus räumlichen molekularen Netzwerken bestehenden Stoffen weder plastische noch viskose Verformungserscheinungen bekannt, deren Zeitbedarf hier fühlbar werden könnte. Das Fehlen plastischer Deformationen führt bekanntlich zu reinem Trennungsbruch unter dem Einfluß von Hauptspannungen; viskose Formänderungen sind zwar möglich, jedoch für alle in Betracht kommenden Zeitdauern bereits in geringem Abstände vom Erweichungsgebiet des Glases unmerklich. Die mikrointerferometrische Prüfung der gleichzeitig entstandenen Bruchflächen zusammengehöriger Bruchufer zeigt schließlich, daß solche Flächen mit lichtoptischer Genauigkeit zusammenpassen, soweit sie unter dem Einfluß nur *einer* Hauptspannung gebildet worden waren (EBERLE und SMEKAL, 1951)². Bei organischen, aus langkettigen Molekülen aufgebauten Gläsern trifft dies nicht zu (WAPLER, 1945), woraus interessante Folgerungen über ihre Bruchmechanik gezogen werden konnten (SMEKAL, 1951).

¹ Die vorliegende Arbeit ist für den VIII. Internationalen Kongreß für Theoretische und Angewandte Mechanik in Istanbul (20. bis 28. August 1952) geschrieben worden.

² Jede, namentlich bei sprödem Stoffverhalten vorkommende Bruchflächen-Verzweigung, die zur Bildung selbständiger weiterer Bruchstücke Veranlassung geben kann, ist auf die Mitwirkung einer weiteren Hauptspannung oder völlig veränderter Spannungssysteme zurückführbar.

Das bisher einfachste Bruchverhalten liegt demnach bei jener Stoffklasse vor, deren Zugbruchflächenpaare einander genau entsprechende Profile besitzen, womit ein im strengsten Sinne des Wortes *sprödes Stoffverhalten* gegeben ist. Indem hier keine Sekundärvorgänge bekannt sind, deren Zeitbedarf ein Verständnis der *Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Geschwindigkeit der Spannungssteigerung im Zugversuch* ermöglichte, muß die *Bruchflächenbildung* selbst einen nicht zu vernachlässigenden Zeitverlauf haben, der irgendwie mit der Geschwindigkeit der äußeren Spannungszunahme verbunden ist. Aufschluß darüber konnte nur von unmittelbaren Messungen der *Bruchfortpflanzungs-Geschwindigkeit* erwartet werden.

§ 2. Kinematische Beschreibung einfacher Bruchvorgänge bei sprödem Stoffverhalten.

Jeder nur durch *eine* Hauptspannung bewirkte Bruchvorgang beginnt an einer mechanisch ausgezeichneten Stelle des beanspruchten Körpers und schreitet *flächenhaft* vor, wodurch schließlich das vollständige Bruchflächenpaar der Körperhälften gebildet wird, soweit nicht durch zusätzliche Beanspruchungen während des Bruchverlaufes Verzweigungen der Bruchflächen hinzukommen³. Die Gesamtheit aller Orte, nach denen die Bruchflächentrennung bis zu einem *bestimmten Zeitpunkt* fortgeschritten ist, wird von einem Kurvenzug begrenzt, der als *zugehörige Bruchfront* bezeichnet werde. Die Bruchfronten bilden auf jeder der beiden Bruchflächen eine identische Schar von einander konzentrisch umschließenden Kurven mit dem Ort des Bruchbeginnes als Mittelpunkt; die orthogonalen Trajektorien dieser Kurvenschar gehen daher sämtlich durch den Bruchanfang. Sie stellen die *Kurven raschesten Bruchfortschritts* längs der Bruchfläche dar, so daß durch sie und die zeitliche Datierung der Bruchfronten das Vektorfeld der *Bruchfortpflanzungs-Geschwindigkeit* längs der Bruchfläche bestimmbar ist.

Bei einachsiger Dehnung eines isotropen quasi-homogenen Körpers der vorausgesetzten Beschaffenheit verläuft die Bruchfläche senkrecht zur Dehnungsrichtung und bildet eine durch den Ort des Bruchbeginnes bestimmte *Ebene*. Wegen der angenommenen Symmetrie muß die Kurvenschar der Bruchfronten aus konzentrischen Kreisen um den Bruchbeginn bestehen, deren gemeinsame Radien die Richtungen des raschesten Bruchfortschritts darstellen. In diesem einfachst-möglichen Falle genügt offenbar die *Ermittlung der Bruchgeschwindigkeit in Abhängigkeit von dem in einer Radienrichtung zurückgelegten Bruchweg*.

Befindet sich der Ort des Bruchbeginnes an einer Körperoberfläche, so gelten alle vorstehenden Folgerungen unverändert, solange ihre Voraussetzungen zutreffen, womit insbesondere gefordert ist, daß die Hauptdehnungsrichtung parallel zur Körperoberfläche liegen kann wie beim achsial gedehnten Zylinderstab. Dann dringt die Bruchfläche,

³ Vgl. die Fußnote ²) auf Seite 110.

wiederum als *Ebene*, senkrecht zur äußeren Oberfläche in den Körper ein, jedoch sind die Bruchfronten keine Vollkreise mehr, sondern konzentrische Kreisbogen, deren gemeinsame Radien nach wie vor Richtungen des schnellsten Bruchfortschritts darstellen. Besonderheiten sind nur längs der Berandung der Bruchfläche auszunehmen, welche durch den Schnitt ihrer Ebene mit der Körperoberfläche entsteht. Während die von der fortschreitenden Bruchfront ausgehenden elastischen Störungen im unbegrenzten Körper keine Symmetrieänderungen bewirken, geschieht dies in begrenzten Körpern, sobald jene elastischen Wellen an den Körperoberflächen reflektiert werden und zur Ausbreitung neuer Wellen Anlaß geben. Dies bedeutet, daß die geschilderte *Radialsymmetrie der Bruchfortpflanzung* bei der angenommenen Lage des Bruchbeginnes an einer Körperoberfläche nur für einen in das Körperinnere weisenden, *begrenzten Winkelbereich der Bruchfläche* erhalten bleibt, bei Lage des Bruchbeginnes im Inneren begrenzter Körper nur für ein dieses Zentrum enthaltendes *begrenztes Bruchflächengebiet*.

§ 3. Beschaffenheit der Bruchflächen von Silikatgläsern.

Eine Prüfung dieser einfachsten Folgerungen gelingt bei Silikatgläsern dadurch, daß ihre Quasi-Homogenität auf den Bruchflächen charakteristische Feinstrukturen hervorbringt, welche mit dem Bruchfortschritt gesetzmäßige Veränderungen zeigen. Auf allenfalls sogar übermikroskopisch glatt erscheinende Bereiche folgt eine mit wachsendem Bruchweg zunehmende submikroskopische Rauigkeit, welche schließlich die Grenze der mikroskopischen Sichtbarkeit übertrifft. Dadurch entsteht ein bei lichtoptischer Betrachtung spiegelnd glattes Bruchflächengebiet, das von einer fein gerauhten Zone umgeben wird. Die Begrenzung des „Spiegels“ durch diese „feine Rauigkeit“ kann in vielen Fällen einer bestimmten *Bruchfront* gleichgesetzt und als solche nachträglich gerechtfertigt werden (SMEKAL, 1950 a).

Der vorhin besprochene Sonderfall einfachster Art ist im *Zugversuch achsial gedehnter kreiszylindrischer Glasstäbe* verwirklicht. Hierbei bestätigt sich ausnahmslos, daß die spiegelnd glatten Bruchflächengebiete in Ebenen senkrecht zur Zugrichtung liegen und kreisförmige Begrenzungen aufweisen, welche bei Lage des Bruchbeginnes im Stabinneren Vollkreise sind und bei Oberflächenlage bestimmte Winkelbereiche kennzeichnen (SMEKAL, 1936, 1950 a, b). Man darf somit erwarten, daß in den genannten Bereichen auch die übrigen Bruchfronten Vollkreise, bzw. Kreisbogen sind und ihre Radienrichtungen dem raschesten Bruchfortschritt zugehören.

Ferner wird man erwarten, dem Mittelpunkt kreisförmig begrenzter Innen- und Rand-„Spiegel“ die *Stelle des Bruchbeginnes* zuordnen zu dürfen. Er ist daselbst in der weitaus überwiegenden Menge der Zugbruchflächen durch eine Besonderheit erkennbar, die meist eine winzige *Unebenheit der Bruchfläche* darstellt, seltener auch als Bläschen oder Fremdstoffteilchen identifizierbar ist. Nachdem jede Abweichung von

der Bruchebene senkrecht zur gemeinsamen Stab- und Zugrichtung auf eine Richtungsänderung der wirksamen Hauptspannung zurückgeführt werden muß, erkennt man, daß der *Bruchbeginn* bei Silikatgläsern durch *Stellen mit Eigenspannungen* ausgelöst wird, deren maximale Zugspannung offenbar weitgehend, aber nicht vollkommen, parallel zur Stabachse gerichtet ist. Absichtliche Hervorbringung derartiger Selbstspannungen, etwa durch kurzdauernde Annäherung einer erhitzten Metallspitze an einen Probestab, erlaubt geradezu den Ort des Bruchbeginns im voraus festzulegen und das Bruchgeschehen mikroskopisch zu beobachten (SPERLING, 1939). Ausgedehnte Eigenspannungsgebiete oder grobe Inhomogenität der Glassubstanz liefern erwartungsgemäß beträchtliche Abweichungen der Zugbruchflächen von der Ebenheit und bedeutende Unsymmetrien der Bruchbilder.

Die vorhin beschriebene „feine Rauigkeit“ besitzt in größeren Entfernungen vom Ort des Bruchbeginns eine dem Bruchfortschritt folgende streifenförmige Struktur, welche zu einer Verringerung der Rauigkeitsunterschiede überleiten kann. Die Gesamtheit dieser Feinstrukturen beruht auf der Entstehung bestimmter Sekundärbruchformen, deren Eigenschaften (SMEKAL, 1950 a) hier indes nicht näher betrachtet werden mögen.

§ 4. Markierung des Bruchfortschritts auf Bruchflächen durch Ultraschallspuren von 10^{10} Hertz.

Die modernen Hilfsmittel zur Untersuchung rasch verlaufender Vorgänge liefern hohe zeitliche Auflösbarkeit, besitzen jedoch kein ausreichendes räumliches Auflösungsvermögen, das hier überdies für die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten beliebig gestalteter Bruchflächen benötigt wird. Man mußte daher von der letzteren Forderung ausgehen und ihrer Befriedigung jene einer hohen zeitlichen Auflösbarkeit anpassen. Von einer Zufallsentdeckung (WALLNER, 1939) geleitet, benutzten wir *Markierungen der Bruchflächen mittels kurzdauernder Impulse von Ultraschall-Stoßwellen* (SMEKAL, 1940, 1942), die durch den Bruchfortschritt selbst ausgelöst werden. Hierzu läßt man den Bruch durch winzige Eigenspannungsstellen laufen, wobei jede Spannungsauslösung die Rückfederung eines verspannten Gebietes und damit die Aussendung einer elastischen Stoßwelle bewirkt.

Wenn durch eine solche Kugelwelle eine Zugspannung transportiert wird, addiert sich letztere für die Dauer des Wellendurchzuges der an einer beliebigen Stelle des Probekörpers vorhandenen Zug-Hauptspannung, wodurch die Resultierende eine vorübergehende Richtungsänderung ergibt. Diese kurzdauernde Abänderung der Spannungsverteilung bleibt im allgemeinen wirkungslos. Betrachtet man jedoch eine Stelle, an der *die vordringende Bruchfront von der Stoßwelle überlaufen wird*, dann muß die zeitweilige Auslenkung der resultierenden Hauptspannung eine vorübergehende Abweichung der Bruchfläche aus ihrem augenblicklichen Verlauf zur Folge haben. Indem sich der Ort, an dem

dies geschieht, mit dem gleichzeitigen Fortschreiten der Welle und der Bruchfront gesetzmäßig verschiebt, wird längs der Bruchfläche eine gebogene „Spur“ hervorgebracht, welcher auf dem einen Bruchufer eine grabenartige Vertiefung, auf dem anderen eine wallartige Erhöhung entspricht. Da solche Spuren als Markierungs-„Linien“ keine wesentliche Beeinflussung des Bruchvorganges bewirken dürfen, sind ihre Entstehungsbedingungen so zu wählen, daß ein Minimum an Energieaufwand hierbei mit einem Optimum an Wahrnehmbarkeit verbunden erscheint.

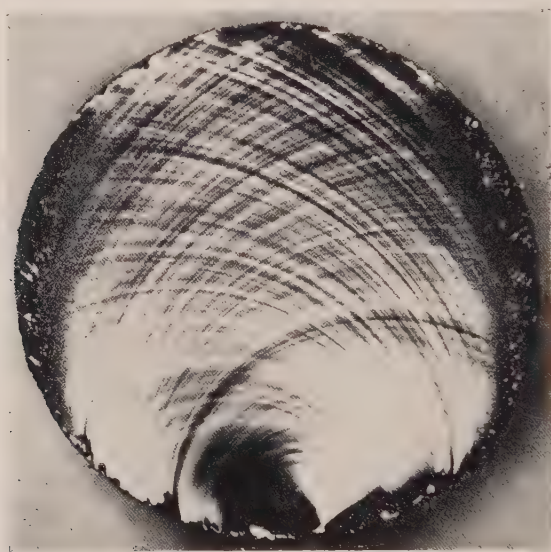


Abb. 1. Zugbruchfläche eines Zylinderstabes mit Ultraschallspuren. SCHOTT-Glas BK 7, grob geschliffen 6 mm Durchmesser. Versuchsgeschwindigkeit $50 \text{ g/mm}^2 \cdot \text{sec}$, Zugfestigkeit $2,94 \text{ kg/mm}^2$. Aufnahme Zeiß-Neophot, Auflicht-Hellfeld. Abbildungsmaßstab des Originals 11,2:1 (G. Apelt 1944).

Die praktische Durchführung des geschilderten Verfahrens liefert Bruchflächen, die bei geeigneter streifender Beleuchtung das Aussehen von Abb. 1 besitzen; sie stellt das Zugbruchbild eines Glasstabes (SCHOTT-Glas BK 7) von 6 mm Durchmesser dar, welcher bei $50 \text{ g/mm}^2 \cdot \text{sec}$ eine Zerreißfestigkeit von $2,94 \text{ kg/mm}^2$ ergeben hatte. Die *Ultraschallspuren* („WALLNER“-Linien) sind so schwach, daß alle von ihnen bedeckten Teile der Abb. 1 in normalem Auflicht als spiegelnd glatte oder feinrauhige Bruchflächengebiete erscheinen würden, genau so wie eine spurenfreie Bruchfläche. Die Spuren bilden *zwei einander durchkreuzende Kurvenscharen*, welche am Rande des Bruchquerschnittes beginnen, beiderseits des bei der gewählten Beleuchtung nicht hervortretenden, ebenfalls am Rande gelegenen Ortes des Bruchbeginns, der von einem spurenfreien Bereich umgeben ist.

Die auf der Staboberfläche gelegenen Eigenspannungsstellen werden durch Schleifen oder Schmirgeln hervorgebracht. Es zählt zu den Besonderheiten der Quasi-Homogenität der Silikatgläser, daß die wirksam werdenden Eigenspannungsstellen Durchmesser von der Größenordnung weniger Mikron besitzen, wodurch die Breiten der Ultraschallspuren um ein Mikron betragen und die maßgeblichen Ultraschallfrequenzen die Größenordnung 10^{10} Hertz aufweisen (SMEKAL, 1940). Diese kürzesten bisher bekannten Ultraschallwellen konnten auch in anisotropen spröden Stoffen wie Quarz- und Korundkristallen erzeugt und mittels ihrer Spuren auf Bruchflächen nachgewiesen werden (SMEKAL, 1942).

§ 5. Bestimmung des Bruchgeschwindigkeits-Verlaufes an Zugbruchflächen.

Die Auswertung der markierten Bruchflächenbilder gründet sich auf die aus ihnen selbst ableitbare Erkenntnis, daß *die Ausbreitungsgeschwindigkeit der benutzten Ultraschallwellen konstant und gleich der transversalen Wellengeschwindigkeit des geprüften Glases* ist (SMEKAL, 1940, 1950 a). Wählt man den Anfangspunkt einer Ultraschallspur als willkürlichen Zeit-Nullpunkt, dann sind alle weiteren Punkte der Spur zeitlich datierbar, also auch ihre Schnittpunkte mit den Spuren der zweiten Kurvenschar; aus den Zeiten dieser Schnittpunkte gewinnt man die Datierung aller übrigen Stellen auf Spuren der zweiten Schar und über deren Schnittpunkte mit der ersten Schar auch jene aller Punkte der letzteren Spuren. Damit erhält man schließlich für den gesamten von Ultraschallspuren bedeckten Teil einer Bruchfläche die Entstehungszeit jedes Bruchflächenpunktes, bezogen auf die als Nullpunkt gewählte Entstehungszeit eines beliebig gewählten Bruchflächenpunktes dieses Bereiches. Die Ableitung des Verlaufes der Bruchfronten bietet dann keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr.

Zur Auswertung von Bruchfronten der *ebenen* Zugbruchflächen von zylindrischen Glasstäben dienen mehrhundertfache Vergrößerungen der Bruchbilder, so daß grundsätzlich hohe Meßgenauigkeiten erzielbar sind. Abb. 2 zeigt die Wiederverkleinerung eines derartigen Meßblattes mit nachgezogenen Ultraschallspuren und eingezeichneten Bruchfronten für einen Quarzglasstab von 6 mm Durchmesser, der mit $50 \text{ g/mm}^2 \cdot \text{sec}$ eine Zerreißfestigkeit von $4,17 \text{ kg/mm}^2$ gezeigt hatte. Die Bruchfronten sind im früher erwähnten Winkelbereich der Erwartung gemäß kreisförmig (APELT, 1945). Die Angabe des Verlaufes der Bruchgeschwindigkeit mit dem zurückgelegten Bruchweg gilt daher für jede radiale Fortpflanzungsrichtung jenes Winkelbereiches einschließlich der eingetragenen Symmetrielinie des Bruchbildes, und betrifft die von Randstörungen freie *Weg-Zeit-Abhängigkeit des Bruchfortschrittes*.

Das Ergebnis der Auswertung eines weiteren Zugbruchbildes von Quarzglas zeigt Abb. 3, wobei die Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeit

keit v auf die transversale Wellengeschwindigkeit als Einheit bezogen ist. Der aus den Messungen entnommene ausgezogene Kurventeil hebt nur jene Meßpunkte hervor, die den *Geschwindigkeitsanstieg* bis zur Erreichung einer *konstanten Endgeschwindigkeit* festlegen. Im Bereiche des strichlierten Kurvenstückes waren Messungen nicht ausführbar, weil für Bruchgeschwindigkeiten unter einem Fünftel der Transversalgeschwindigkeit beobachtbare Ultraschallspuren nicht mehr auftreten, nachdem die Winkel zwischen Bruch- und Schallwellenfront hier für eine Spurenbildung zu klein werden.

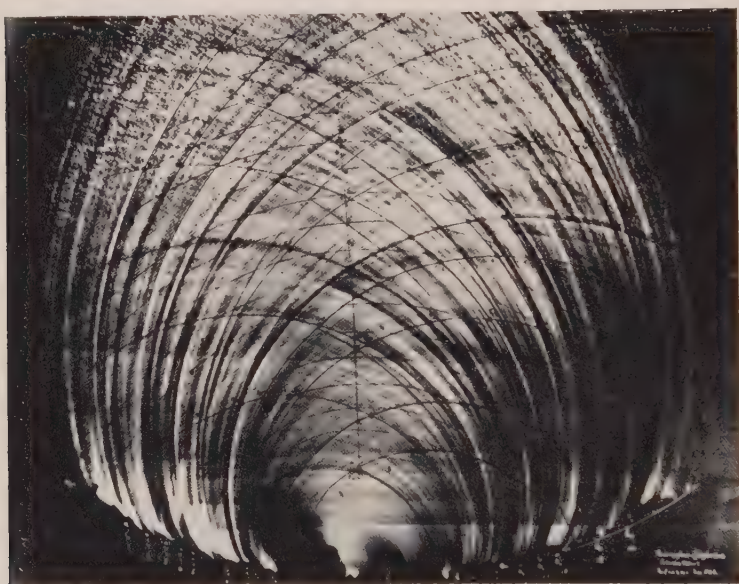


Abb. 2. Zugbruchfläche eines Zylinderstabes mit Ultraschallspuren. Quarzglas, feinmattiert, 6 mm Durchmesser, Versuchsgeschwindigkeit 50 g/mm².sec. Zugfestigkeit 4,17 kg/mm². Wiederverkleinerung eines Meßblattes mit eingezeichneten Bruchfronten und nachgezogenen Ultraschalllinien. (G. APALT 1944).

Aus Abb. 3 kann errechnet werden, daß der Zeitbedarf des durch Geschwindigkeitsbestimmungen erfaßten Teils der Bruchfortpflanzung nur wenige Mikrosekunden (10^{-6} sec) umfaßt, wogegen die Zeitdauer vom Bruchanfang bis zum ersten Meßpunkt unermittelt bleibt. Die Gesamtdauer des Zugversuches beträgt demgegenüber rund 70 Sekunden, wie aus der konstant gehaltenen Geschwindigkeit der Spannungssteigerung sowie der Höhe der Zerreißspannung entnommen werden kann.

Über die in verschiedenen Einzelversuchen auftretenden Unterschiede gibt für die beiden bereits genannten Glassorten Abb. 4 nähere Auskunft. Sie zeigt, daß die *Endgeschwindigkeiten der Bruchfortpflanzung als Stoffkonstanten* anzusprechen sind, während die mit

kleineren Geschwindigkeiten zurückgelegten Bruchwege und die Bruchgeschwindigkeitsanstiege, ebenso wie die Zerreißspannungen individuelle Verschiedenheiten aufweisen, und Einflüsse des umgebenden Mediums erkennen lassen. Als Beispiel für das numerische Ausmaß dieser Unterschiede mögen die Quarzglasstäbe mit den Zerreißfestigkeiten 3,45 und 4,41 kg/mm² betrachtet werden. Die Differenz der Gesamtdauer dieser beiden Zugversuche betrug 19 Sekunden, jene der mit variabler Geschwindigkeit zurückgelegten Bruchwege 0,4 mm und die der zugehörigen Zeitdauern 0,2 Mikrosekunden. Dabei ist hervorzuheben, daß die Endgeschwindigkeit der Bruchausbreitung hier vom „festeren“ Stab auf der kürzeren Bruchwegstrecke, jedoch unter größerem Zeitaufwand erreicht wird.

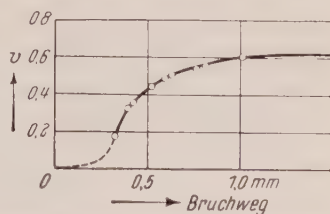


Abb. 3. Anfangsverlauf der Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeit mit zunehmendem Bruchweg. Strichlierter Teil extrapoliert. Quarzglasstab, 6 mm Durchmesser, 50 g/mm²·sec, Zugfestigkeit 3,45 kg/mm².

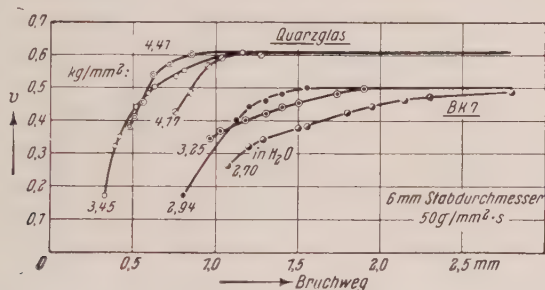


Abb. 4. Bruchgeschwindigkeits-Anstiege von je drei Zylinderstäben aus BK 7 und Quarzglas für übereinstimmende Versuchsbedingungen mit angegebenen Zugfestigkeiten in kg/mm².

§ 6. Gegenüberstellung der beiden Entwicklungsstufen des Bruchgeschehens.

Der für sprödes Stoffverhalten erbrachte Nachweis einer *Veränderlichkeit der Bruchfortpflanzungs-Geschwindigkeit* während des Zugversuches bestätigt die eingangs gefolgerte Erwartung, daß in diesem Falle ein Zeitbedarf des Bruchgeschehens und die Möglichkeit eines Zusammenhanges mit der Geschwindigkeit der äußeren Spannungssteigerung bestehen müsse um den Einfluß jener letzteren auf die Zugfestigkeit verständlich zu machen. Der experimentelle Befund, daß die Bruchgeschwindigkeit monoton anwächst und einen konstanten hohen Endwert erreicht, besagt aber auch, daß in der Bruchentwicklung zwei Stufen zu unterscheiden sind, von denen allein die erste mit jenem Einfluß der Spannungssteigerung verbunden sein kann. Wegen der Konstanz des Endwertes der Bruchgeschwindigkeit und der Überein-

stimmung seiner Größenordnung mit jener der transversalen Wellengeschwindigkeit muß in diesem stationären Abschnitt der Bruchfortpflanzung jede Wirksamkeit äußerer Spannungsänderungen bereits geschwunden sein. Dies ermöglicht, den Einfluß der Versuchsgeschwindigkeit auf die Zugfestigkeit zur Kennzeichnung der langsamen Anlaufphase des Bruchgeschehens heranzuziehen, obwohl die vorliegenden Bruchgeschwindigkeits-Messungen davon nur den Übergang zur stationären Endphase erfaßt haben.

Hierzu beschränken wir uns auf jenen Temperaturbereich, in dem die Zunahme der Versuchsgeschwindigkeit ein Ansteigen, Verlangsamung dagegen ein Abnehmen der Zerreißspannungen ergibt und Temperaturzunahme einer Verkleinerung der Versuchsgeschwindigkeit gleichwertig ist (SMEKAL, 1936, SPERLING, 1939). Daraus folgt, daß die Bruchfortpflanzung hier einen zeitlich trägen Vorgang darstellt, welcher durch die Wärmebewegung ebenso gefördert wird wie durch die steigende mechanische Beanspruchung der Probekörper. Eine gewisse Trennung beider Einflüsse erzielt man durch *unveränderliche Anspannung der Probekörper* und Ermittlung ihrer *Beanspruchungsdauer bis zum Bruch-eintritt* in Abhängigkeit von der Höhe der gewählten Anspannung (SPERLING, 1939). Die bekannten Erscheinungen der *Zeitfestigkeit* bestehen auch für die hier geprüften Körper spröden Stoffverhaltens (§ 1) und ergeben, daß die Dauerstandfestigkeit im Zugversuch rund halb bis zweidrittel mal so groß gefunden wird wie die Zugfestigkeit bei Versuchsgeschwindigkeiten um $50 \text{ g/mm}^2 \cdot \text{sec}$. Statischer und Dauerstandversuch unterscheiden sich hier offenbar nur darin, daß letzterer die Mindestbeanspruchung ermittelt, bei der ein Bruchvorgang ohne weitere Zusatzbeanspruchung vorsichgeht, während ersterer die *Spannungszunahme auch über den verborgen bleibenden Bruchanfang hinweg fortsetzt* und dadurch eine mit zunehmender Versuchsgeschwindigkeit abnehmende Versuchsdauer erzwingt. Der empirische Zusammenhang dieser beiden Größen ist zumindest für einen größeren Bereich logarithmischer Natur (SMEKAL, 1936), womit ein nichtlineares, monotonen Wachstum des Bruchgeschwindigkeits-Anstieges gefordert erscheint.

Die *Anlaufphase der Bruchfortpflanzung* ist somit dadurch gekennzeichnet, daß die elastischen Beanspruchungen allein nicht ausreichen, die Bruchfront vorzuschieben, so daß dazu thermische Energieschwankungen geeigneter Mindestgröße mitbenutzt und abgewartet werden müssen. Dieser „*spannungsthermische*“ Mechanismus der *Bruchausbreitung* bewirkt, daß der individuellen Beschaffenheit des Bruchbeginnes ein maßgeblicher Einfluß zukommt, daß die anfängliche Zurücklegung kleinster Bruchwege große Wartezeiten erfordert, und daß diese Wartezeiten desto rascher abnehmen, je mehr die mechanische Beanspruchung im Zugversuch gesteigert oder die Versuchstemperatur erhöht wird.

Die *Endphase der Bruchfortpflanzung* beginnt, sobald die Mitwirkung der Wärmebewegung entbehrlich geworden ist und die Höhe der mechani-

schen Beanspruchung für die weitere Bruchflächentrennung ausreicht – womit die Nachwirkung der Individualität des Bruchbeginnes immer mehr zurücktritt. Die Bruchgeschwindigkeit kann noch weiter zunehmen, wird jedoch durch jene Geschwindigkeit begrenzt, mit welcher der Bruchfront der zur Fortsetzung der Bruchflächenbildung nötige Energiebedarf zugeleitet werden kann. Dieser Grenzggeschwindigkeit entspricht für homogene Medien die Geschwindigkeit ihrer Transversalwellen, für inhomogene Stoffe eine entsprechend kleinere Transportgeschwindigkeit gleicher Größenordnung (SMEKAL, 1938 a, 1940). Der „athermische“ Mechanismus der Bruchausbreitung liefert somit einen stationären Höchstwert der Bruchgeschwindigkeit mit dem Charakter einer elastischen Wellengeschwindigkeit von zutreffender Größenordnung. Diese Höchstgeschwindigkeit sollte daher mit steigender Temperatur ein schwaches Absinken zeigen, ähnlich dem der normalen Wellengeschwindigkeiten.

§ 7. Ergänzende Bemerkungen.

a) Die hier bestimmte konstante Höchstgeschwindigkeit der zweidimensionalen Bruchfortpflanzung beträgt in Raumtemperatur bei Quarzglas 2100 m sec, beim SCHOTT-Glas BK 7 1800 m sec. Für die eindimensionale Bruchausbreitung ist das Vorhandensein konstanter Bruchgeschwindigkeiten schon vorher aufgefunden und gemessen worden (SCHARDIN und STRUTH, 1937, 1938; BARSTOW und EDGERTON, 1939; SCHARDIN, 1940), wobei für die genannten Glasarten 2200, bzw. 1700 m sec erhalten wurden (SMEKAL, 1950 a). Die Übereinstimmung ist ziemlich gut, doch ist noch ungeklärt, ob volle Identität bestehen kann. Die Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der eindimensionalen konstanten Bruchgeschwindigkeit ergab eine geringe Abnahme bei Temperatursteigerung (DIMMICK und Mc CORMICK, 1950; DIMMICK, 1951), ähnlich der vorhin erwarteten. Die zur Messung eindimensionaler Bruchfortpflanzungs-Geschwindigkeiten benutzten Verfahren sind durch hohe zeitliche Auflösung ausgezeichnet, besitzen jedoch kein vergleichbares räumliches Auflösungsvermögen, so daß ihnen die langsame Anlaufphase des Bruchgeschehens entgangen ist.

b) Die beiden Bruchentwicklungsphasen können im Modellversuch an einem Probestab mit künstlich angebrachter Eigenspannungsstelle (§ 3) mikroskopisch beobachtet werden. In einem Beispiel dieser Art wurde an jener Stelle im Zugversuch ein Bruchflächenspalt gebildet, der während der weiteren Spannungszunahme längere Zeit unverändert blieb, schließlich aber in unbeobachtbar kurzer Zeit zu einem durchlaufenden Bruch erweitert wurden (SPERLING, 1939).

c) Die Entstehung der Bruchbeginne aus Eigenspannungsstellen (§ 3) bedingt, daß der primäre, im allgemeinen unsichtbar winzige Bruchspalt durch Auslösung derartiger Spannungen gebildet wird und daher nicht die Beschaffenheit des seinerzeit von GRIFFITH angegebenen Reißpalt-Modells besitzt, das durch reversible Erweiterung die Bruch-

grenze definieren sollte (GRIFFITH, 1920, 1924). Frühere Versuche, die GRIFFITHSchen Ansätze weiterzuentwickeln (SMEKAL, 1936) sind damit gegenstandslos geworden, auch haben übermikroskopische Untersuchungen an Glasoberflächen das Nichtvorhandensein GRIFFITHScher Risse dargetan (SMEKAL, 1951).

d) Die Entstehung der Bruchbeginne aus Eigenspannungsstellen liefert eine einfache Deutungsmöglichkeit für die weitaus bevorzugte Lage der Bruchbeginne an Körperoberflächen. Es ist weder notwendig noch wahrscheinlich, daß die wirksamsten Eigenspannungsstellen stets in der Körperoberfläche liegen. Die Bevorzugung braucht erst einzusetzen, wenn ein primärer Bruchspalt infolge seines spannungsthermischen Wachstums mit der Oberfläche Verbindung erhält und durch Zutritt grenzflächenaktiver Stoffe zu gesteigertem Wachstum befähigt wird.

e) Bei Annäherung an die Erweichungstemperatur gelang es durch geeignete mechanische Vorbeanspruchung und Wärmebehandlung, Steigerungen der Zugfestigkeit von Glasstäben zu erzielen (SPERLING, 1939), so daß es möglich erscheint, der Bruchfortpflanzung durch Abbau von Eigenspannungen und Viskositätseffekte entgegenzuwirken.

f) An Stelle der einachsigen Zugbeanspruchung kann auch ein gleichförmiger Manteldruck auf die zylindrische Staboberfläche benutzt werden, vorausgesetzt, daß die Stabenden durch Stopfbuchsen aus der Druckkammer herausgeführt sind und auch sonst keine äußere Längsbeanspruchung erfahren. Solche unter Öldruck ausgeführte Zerreißversuche ergaben praktisch die gleiche mittlere Zerreißfestigkeit wie vom gleichen Öl umgebene Glasstäbe im gewöhnlichen Zerreißversuch (APELT, 1944). Die Manteldruckversuche zeigten eben glatte Bruchflächen ohne die etwa in Abb. 1 erkennbaren Randstörungen des Bruchquerschnittes, welche mit der Beeinflussung des Bruchfortschrittes längs der Staboberfläche durch elastische Wellenreflexion zusammenhängen. Es scheint demnach, daß die Behinderung der Wellenausbreitung durch die Staboberfläche unter Öldruck beseitigt oder bis zur Unmerklichkeit herabgemindert wird. Als Folge der *während des Bruchvorganges* durch den Manteldruck bewirkten Biegebeanspruchung der Stabhälften entstehen hier auf den Bruchflächen in Richtung des Bruchfortschrittes verlaufenden charakteristische „Bajonettspünge“, die auf eine Bruchbildung durch zwei senkrecht zueinander gerichtete Hauptspannungen zurückzuführen sind (EBERLE und SMEKAL, 1951).

g) Bei anisotropem, einkristallinem Stabmaterial ist der zeitliche Verlauf der Bruchfortpflanzung grundsätzlich gleichartig wie bei den isotropen Glasstäben. Dies kann für gut spaltbare Kristalle vor allem aus den Feinstrukturen der *Spaltflächen* erkannt werden, die hier als Zugbruchflächen auftreten. Der Ort des Bruchbeginnes, die spiegelnde Bruchflächenzone und der sie umgebende Bereich feiner Rauigkeit treten bei synthetischen Steinsalzkristallen besonders deutlich hervor,

wenn durch Einbau sehr geringer, örtlich jedoch stark störender Fremdstoffmengen (z. B. von wenigen Hundertel Molprozent SrCl_2) für eine merkliche Beeinträchtigung der Güte der Spaltbarkeit gesorgt wird (BURGSMÜLLER, 1936).

h) Für die praktische Anwendung von Bruchvorgängen in der Zerkleinerungstechnik kann die Langsamkeit der spannungsthermischen Anfangsphasen eine wesentliche Behinderung bedeuten, die durch Anwendung immer größerer Spannungssteigerungs-Geschwindigkeiten zwar zurückgedrängt, aber niemals völlig beseitigt werden kann, wie auch an Bruchvorgängen gefunden wurde, die durch Stoßwellen von Explosionsvorgängen ausgelöst werden. Der Zeitbedarf kann dagegen durch weitgehende Verkürzung langsam zurückgelegter Bruchwege bekämpft werden, indem man an möglichst dichtliegenden Kerbstellen des Körpers Bruchvorgänge gleichzeitig zur Auslösung bringt, wodurch explosionsähnlich verlaufende Kollektivvorgänge zustandekommen, wie etwa beim Würfeldruckversuch (SMEKAL, 1938 b).

Zusammenfassung.

Die vorstehenden Untersuchungen beziehen sich auf Stoffe, die während des Bruchvorganges weder plastische noch viskose Verformungserscheinungen aufweisen, so daß zusammengehörige Bruchufer lichtoptisch einander genau entsprechende Profile besitzen.

Die Markierung solcher im Entstehen begriffener Bruchflächen mittels geeigneter Systeme von Ultraschallspuren ermöglicht eine räumliche und zeitliche Verfolgung der Bruchfortpflanzung, sowie Messung ihrer Geschwindigkeit längs der Wege raschesten Bruchfortschreitens.

Die Anwendung des Verfahrens auf die ebenen Bruchflächenteile im Zugversuch geprüfter kreiszyindrischer Glasstäbe bestätigt die erwarteten Symmetrieeigenschaften des Bruchfortschritts und liefert den Verlauf der Bruchgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Bruchwege während der letzten Mikrosekunden des Bruchverlaufes. Die Bruchgeschwindigkeit wächst hier rasch an und erreicht einen hohen konstanten Endwert, der kleiner ist, aber die gleiche Größenordnung besitzt wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen.

Es wird gezeigt, daß der Bruch an einer Stelle mit Eigenspannungen beginnt und zwei, physikalisch wie auch technologisch unterschiedliche Phasen durchläuft. Während der zeitlich ausgedehnten Anlaufphase nehmen die Energieschwankungen der Wärmebewegung wesentlichen Anteil an der allmählichen Beschleunigung der Bruchfortpflanzung; die zeitlich kurze Endphase verläuft athermisch und infolgedessen unter stationären Bedingungen. Die Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Temperatur und der Geschwindigkeit der Spannungssteigerung, sowie die Erscheinungen der Zeitfestigkeit sind daher mit der trägen Anlaufphase verknüpft. Die Endphase beherrscht den größten Teil des Bruchweges, umfaßt jedoch keine maßgeblichen Beanspruchungs-Änderungen.

Literatur.

- G. APELT, Unveröffentlichte Versuche 1944 (Veröffentlichung demnächst); Unveröffentlichte Diplomarbeit Halle/Niederroden 1945.
- F. E. BARSTOW & H. E. EDGERTON, Journ. Amer. Ceram. Soc. **22**, 302, 1939.
- H. M. DIMMICK & J. McCORMICK Glastechn. Ber. **23**, 193, 1950.
- H. M. DIMMICK, Journ. Soc. Glass Tech. **35**, 318, 1951.
- E. EBERLE & A. SMEKAL, noch unveröffentlichte Versuche, Graz 1951.
- A. A. GRIFFITH, Trans. Roy. Soc. London A **221**, 163, 1920.
- Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924, S. 55.
- W. BURGSMÜLLER, ZS. f. Phys. **103**, 633, 1936.
- H. SCHARDIN & W. STRUTH, ZS. techn. Phys. **18**, 474, 1937; Glastechn. Ber. **16**, 219, 1938.
- H. SCHARDIN, Glastechn. Ber. **18**, 233, 1940.
- A. SMEKAL, Ergeb. d. exakt. Naturwiss. **15**, 106, 1936; Glastechn. Ber. **16**, 228, 1938; Z. VDI Beih. Verfahrenstechnik 1938, Nr. 6, S. 159; Physikal. ZS. **41**, 475, 1940; Nova Acta Leopoldina (N. F.) **11**, 512, 1942; Glastechn. Ber. **23**, 57, 1950; Glastechn. Ber. **23**, 186, 1950; Bericht für die Internationale Glaskommission Paris 1951; Noch unveröffentlichter Vortrag, Köln, September 1951.
- G. SPERLING, Unveröffentlichte Untersuchungen, Halle 1939.
- H. WALLNER, ZS. f. Phys. **114**, 368, 1939.
- D. WAPLER, Diss. Halle 1945.

Buchbesprechungen.

Initiation and Growth of Explosion in Liquids and Solids. Von F. P. BOWDEN und A. D. YOFFE. (Cambridge Monographs on Physics. Herausgegeben von N. Feather, D. Shoenberg und G. K. Batchelor.) Mit 68 Textabb., XII, 104 S. Cambridge: At the University Press. 1952. Geb. 22 s. 6 d. net.

Die vorliegende Monographie behandelt hauptsächlich die Arbeiten der Autoren und ihrer Mitarbeiter und bringt, trotzdem die Forschung auf diesem Gebiete noch im Fluß ist, bemerkenswerte Ergebnisse. Der Mechanismus der Einleitung von Explosionen in Flüssigkeiten und Festkörpern ist relativ einfach. Die verschiedenen Arten der Einleitung einer Explosion durch Reibung, Stoß und das Wachsen einer Explosion zur Detonation, werden ausführlich behandelt. Auch die Meßmethoden werden eingehend erörtert und zahlreiche wunderschöne Aufnahmen geben ein Bild des physikalischen Vorganges. In vielen Tabellen sind die Resultate übersichtlich angeordnet, so daß der Leser zusammen mit zahlreichen Figuren der experimentellen Anordnung einen guten Überblick bekommt. Ausführliche Referenzen, sowie ein alphabetisches Register erleichtern den Gebrauch des sehr empfehlenswerten Werkes.

A. FLORIAN, Graz.

Colloid Science. Herausgegeben von H. R. KRUYT. Band I: Irreversible Systems. Mit 190 Textabb., XX, 389 S. Amsterdam—Houston—New York—London: Elsevier Publishing Company. 1952. Geb. 70 s.

Nun ist auch der langerwartete erste Band des „Kruyt“ etwa drei Jahre nach dem zweiten erschienen. Daß ein starkes Bedürfnis nach einer derartigen zusammenfassenden Darstellung der Kolloidwissenschaft besteht, kann wohl nicht bezweifelt werden. In den letzten 50 Jahren hat die Lehre von den Kolloiden eine ungeahnte Ausdehnung sowohl hinsichtlich der verwendeten Forschungsmethoden als auch des Tatsachenmaterials und der praktischen Anwendung erfahren. Hand in Hand damit ging allerdings eine gewisse Zersplitterung des früher so einheitlichen Gebietes und eine teilweise Verwischung der Grenze gegenüber den Nachbardisziplinen. Angesichts dieser Entwicklung ging es dem Herausgeber des vorliegenden Standardwerkes vor allem darum, die Eigenständigkeit der Kolloidwissenschaft als eigenes Forschungsgebiet zu betonen, und das ist ihm auch, soweit es überhaupt möglich ist, gelungen. Die Darstellung ist klar und übersichtlich und, obwohl von verschiedenen Fachleuten geschrieben, wie aus einem Guß. Vielleicht hätte der praktische Wert des Buches durch reichlichere Literaturangaben noch etwas erhöht werden können. Inhaltlich folgt der erste Band streng der im zweiten durchgeführten Richtlinie, allgemeine Gesetzmäßigkeiten und methodische Eigentümlichkeiten in den Vordergrund zu stellen, wodurch naturgemäß das reine Tatsachenmaterial etwas in den Hintergrund tritt. So wird man hier vergebens nach Details über irgend ein bestimmtes kolloides System suchen. Es ist kein Sammel- oder Nachschlagewerk, sondern ein Lehrbuch von hohem Niveau, dessen weite Verbreitung man nur wünschen kann.

G. POROD, Graz.

Raumfahrtforschung. Herausgegeben von H. GARTMANN. Mit 54 Textabb., 199 S. München: R. Oldenbourg. 1952. Geb. DM 16,50.

Zum ersten Male liegt ein deutsches Buch vor, das die Weltraumfahrt auf wissenschaftlicher Grundlage behandelt. Bedeutende Forscher lieferten Beiträge zu diesem Werk. Nach einem ausführlichen geschichtlichen Überblick werden zuerst die himmelsmechanischen Grundlagen der Raumfahrt erörtert, wobei vom Zweikörperproblem ausgegangen wird. In wissenschaftlich einwandfreier Art werden, unter Benutzung der LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen, die lösbaren Fälle des Dreikörperproblems behandelt. Dann folgt ein Artikel über die Außenstationen, in welchem die Gesichtspunkte für die Auswahl der Bahnen, das Stufenprinzip sowie das Stufengerät behandelt werden. Auch die Kostenabschätzung für die Einrichtung einer Außenstation findet hier ihren Platz. Professor OBERTH, der Altmeister auf dem Gebiete der Raumfahrt, gibt dann einen wertvollen Beitrag zum Problem der Stationen im Weltraum, in welchen das Problem des Andruckes, der Funkverkehr, die Sonnenkraftwerke und andere Zukunftsprobleme anregend behandelt werden. Den Abschluß bildet eine Übersicht über die medizinischen Probleme der Raumfahrt, verfaßt von HEINZ VON DIRINGSHOFEN. Hier werden z. B. die Forderungen für das Klima in der Raumschiffkabine, die biologische Wirkung der Schwerelosigkeit, die Gefahren der kosmischen Strahlung und einige physiologische Wirkungen erörtert. Zum Schluß wird ein Überblick über die derzeitigen Gesellschaften für Raumfahrtforschung und eine ausführliche Bibliographie der Raumfahrt gegeben. Die Tabellen und zahlreichen Abbildungen fördern das Studium dieses, auch für den allgemeinen Physiker, sehr wertvollen Werkes.

P. URBAN, Graz.

Dimensional Analysis. Von H. E. HUNTLEY. 158 S. London: Macdonald & Co. Ltd. 1952. Geb. 20 s. net.

Dimensionsbetrachtungen sind seit jeher für den Physiker zur Überprüfung von Formeln praktisch geeignet gewesen. Sowohl für den Forscher, als auch für den Studenten haben sie sich als sehr zweckmäßig herausgestellt. Der Autor verfügt über große Erfahrung und bringt sehr instructive Beispiele. Nach einem einführenden Kapitel über Einheiten und Dimensionen wird zuerst das Methodische behandelt. Dann folgt ein historischer Überblick, woran sich die Behandlung der verschiedenen Zweige schließt. So wird die Bewegung der Körper in Flüssigkeiten behandelt, die Größen der Wärmelehre und der Elektrizitätslehre, die für uns von besonderer Wichtigkeit sind finden ebenfalls ihren Platz. Ausführliche Tabellen sind in einem Anhang zusammengestellt und ein Verzeichnis der wichtigsten Literatur ist zur Vertiefung des Studiums vorgesehen. Das Werk ist besonders den Studierenden der Physik zu empfehlen.

P. URBAN, Graz.

Das „physikalische Modell“ und die „metaphysische Wirklichkeit“. Versuch einer Metaphänomenologie. Von E. NICKEL. („Glauben und Wissen“: Nr. 9.) 100 S. München-Basel: E. Reinhardt-Verlag. 1952. DM 4,20, geb. DM 5,80.

Wir Naturwissenschaftler, die wir uns von unseren Wissenschaften mehr und tiefere Kenntnisse erworben haben, als dies durch das Studium populärer Darstellungen aus zweiter bis n -ter Hand möglich ist (unglaublich wie lange wissenschaftlich getarnter Unsinn wiedergekauft wird bis er schließlich auf den Seiten kaum gelesener und noch weniger einleuchtender Bücher vergilbt), wir, sage ich, stehen alle den Darbietungen der modernen Philosophie etwas skeptisch gegenüber. Beim Atmen dieser heutigen „philosophischen Luft“ halten wir uns, um

keine Lungenentzündung zu bekommen, gleich die Nase zu und denken mit Goethe: „...denn eben wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein. Mit Worten läßt sich trefflich streiten, mit Worten ein System bereiten, an Worte läßt sich trefflich glauben, von einem Wort läßt sich kein Jota rauben. — Verzeiht ich halt euch auf...“ — Wobei die Worte reichlich seltsam klingen wie „Beziehung zwischen“, „Etwasse“ (S. 22), „gewisse Nicht-Iche“ (S. 28) oder gar „das Nicht-ganz-in-der-Ordnung-Sein der Welt“ (S. 65).

Man hat sich auch, glaubt der Rezensent, in der Wissenschaft schon einigermaßen geeinigt, unter kosmologisch etwas anderes zu verstehen als das Thema der S. 62 ff. Auch bei Sätzen wie „Nicht weil wir Gott denken, existiert er; sondern weil wir, ohne Gott zu denken, nicht denken können, muß Gott existieren“ (S. 58) ist es uns nicht klar wozu dann eigentlich die Offenbarung nötig war, wenn das Dasein Gottes so einfach und zwangsläufig folgt. Aber dies sind ja eigentlich theologische Fragen. Der Rezensent muß sich selber als religiösen Menschen bezeichnen; er wehrt sich nur gegen eine derartige Verquickung von Glaubensdingen mit einer ganz schief aufgefaßten Naturwissenschaft auf die der Autor so gerne gütig herunterblickt (s. nur den Titel).

Auch scheint der Autor das Wesen der begrifflichen Abstraktion nicht verstanden zu haben: es ist *immer* eine Skelettierung, auch in seinem Fall. Die Wissenschaft analysiert deswegen, um in den Komponenten schon besser bekannte Erscheinungen wiederzufinden. Anders der Autor: Er geht von der ihm anscheinend bestens bekannten Metaphysis aus. Dies ist Spiritismus, dem der Autor nahestehen scheint. Oder noch besser, es ist eine schöne Dichtung.

Trotz allem ist dieses Werk auch für uns „Exakte“ sehr lesenswert. Weniger um uns zu bekehren (dies ist wohl, wie die Entwicklung der exakten Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten zeigt, gar nicht mehr notwendig), als streitbare Geister durch Widerspruch zum Selbstdenken anzuregen und bei vielen wertvollen und schönen Gedanken begeistert zustimmen zu lassen.

G. WINKLER, Graz.

Moderne allgemeine Mineralogie (Kristallographie). Von W. NOWACKI. Mit 60 Textabb., VIII, 64 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. DM 5,80.

Die allgemeine Mineralogie von einem modernen Standpunkt aus darzustellen und die Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften herzustellen ist dem Verfasser des vorliegenden kleinen Buches zweifellos gelungen. Die Abschnitte über morphologische Kristallographie und Strukturlehre (Kristallmorphologie) bringen die historische Entwicklung der Gedankengänge, die zu unseren heutigen Vorstellungen führen. Dieser Weg ist ja immer besonders anschaulich. In der Kristallphysik werden vom LAUE-Versuch aus, der wieder von der historischen Situation her erklärt wird, die Methoden der röntgenographischen Strukturanalyse in knapper Form erwähnt. Daran schließen sich einige weitere Beispiele aus der Kristallphysik. In der Kristallchemie findet eine erfreulich klare Diskussion des Molekülbegriffes für kristallisierte Substanzen statt. Ebenso nehmen die Silikate einen ihrer Bedeutung entsprechenden Raum ein. Hier, wie auch bei der Entwicklung des Begriffes der kristallchemischen Formel, vermißt man die sonst im Buch gepflogene historische Darstellung. Großen Anklang wird auch, besonders bei Chemikern, der Abschnitt über die organischen Kristalle finden.

Die Abbildungen, fast ausnahmslos aus Büchern oder Spezialarbeiten übernommen, sind bis auf wenige (z. B. Abb. 15, Strukturmodell von Quarz) ausgezeichnet.

Das angenehm lesbare Buch ist keine Einführung im üblichen Sinne und dem nicht schon Vorgebildeten wird vieles unklar bleiben. Ebenso sicher wird aber der Leser viele Anregungen empfangen. Der billige Preis und die gute Ausstattung wird noch dazu beitragen, dem Buch seinen Leserkreis zu sichern.

H. HERITSCH, Graz.

Physical Properties of Glass. Von J. E. STANWORTH. Mit 107 Textabb., VIII, 224 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1950. Geb. 21 s. net.

Das Buch des britischen Glasforschers STANWORTH bietet die erste moderne Darstellung physikalischer Eigenschaften von anorganischen Gläsern, insbesondere Oxydgläsern, nachdem das 1938 erschienene, ähnlich betitelte Werk des Amerikaners G. W. MOREY, *Properties of Glass*, vor allem der vollen Breite des empirischen Verhaltens binärer und polynärer Oxydsysteme gewidmet war. Indem STANWORTH von den Ergebnissen der theoretischen und der experimentell-röntgenographischen Erforschung von Glasstrukturen ausgeht (ZACHARIASEN 1932, WARREN und Mitarbeiter 1934—1942), wird nunmehr auch dieses Forschungsgebiet grundsätzlich auf die Tatsachen der Atomphysik zurückgeführt, womit zunächst die chemisch einheitlichen Gläser in den Vordergrund treten. Indes ist auch das Buch von STANWORTH vor allem für den industriell tätigen Glastechnologen bestimmt — ein überaus eindrucksvoller Beleg für den durch die Lebensarbeit von W. E. S. TURNER geschaffenen Standard technisch-wissenschaftlicher Durchdringung der britischen Glasindustrie.

Die eingehende Schilderung der Strukturfragen umfaßt im wesentlichen den ersten Hauptteil des Buches (*The Composition and Structure of Glasses*, 64 Seiten), wobei auf die chemische Zusammensetzung der technisch wichtigen Gläser nur einleitend-referierend bezuggenommen ist. Diesem ersten Hauptteil sind auch die wichtigen optischen Eigenschaften der Gläser, wie Brechungsverhalten, Farbe und Fluoreszenzvermögen zugewiesen, wo sie entweder direkt deutbar werden oder als willkommene zusätzliche Erkenntnisquellen einer Vertiefung von Strukturaussagen nutzbar sind. Der zweite Hauptteil (*Some Properties of Glass in the Solid State*, 93 Seiten), gilt den technisch wichtigsten Anwendungs-Eigenschaften und behandelt das Bruchverhalten, die mechanischen Festigkeitseigenschaften, die Diffusion von Metallionen und Gasen in Gläsern, die elektrischen Eigenschaften und das Oberflächenverhalten der Gläser. Der dritte Hauptteil (*Some Properties of Glasses in the Liquid State and in the Transformation Range*, 62 Seiten) betrifft demgegenüber die technisch wichtigsten Verarbeitungs-Eigenschaften, nämlich das Verhalten der Gläser im Erstarrungsbereich, ihre Viskosität und Oberflächenspannung, das Entspannen von Gläsern und ihre Entglasungs-Eigenschaften.

Von der vorhin gekennzeichneten Zielsetzung des Buches aus gesehen, dürften Stoffwahl und Stoffverteilung als sehr glücklich bezeichnet werden. Hervorzuheben ist auch, daß eine atomistische Grundlegung bisher nur im stofflichen Bereich des ersten Hauptteiles des Buches durchführbar erscheint, während sie zu den in den beiden anderen Teilen behandelten Erscheinungen bisher nur mehr oder minder wirksame Beiträge zu leisten im Stande ist. Die Schilderung dieser, auf zusätzliche Vorstellungselemente angewiesenen Eigenschaftsbereiche der Gläser wird von einem gesunden Realismus getragen, dem auch solche Leser folgen können, die dort andere Auffassungen bevorzugen würden. Als wesentliche Schwierigkeit kann man empfinden, daß die Arten des Bruchverlaufes vor der Schilderung des mechanischen Festigkeitsverhaltens gebracht werden, obwohl es von vorneherein unausweichlich erscheint und auch gelungen ist, den Bruchverlauf als Ergebnis der jeweils wirksamen mechanischen Beanspruchungen aufzufassen. —

Das Buch wird dankbar begrüßt werden und füllt eine wesentliche Lücke aus. Seine Ausstattung ist gut, trotzdem auf die Wiedergabe von Autotypen verzichtet ist. Aus dem Zeitpunkt seines Erscheinens ist ersichtlich, daß es vorwiegend auf Ergebnissen britisch-amerikanischer Forschung beruht, und daß Resultate deutscher Kriegs- und Nachkriegs-Veröffentlichungen nur in geringem Umfange berücksichtigt sind. Daher ist der gegenwärtige Stand der Forschung über den im Buche wiedergegebenen mehrfach nicht unwesentlich fortgeschritten, ein Nachteil, der vor allem für angelsächsische Benutzer gilt. Nachdem die englisch-amerikanische Fachliteratur im deutschen Sprachbereich für die Kriegs- und Nachkriegs-Zeit nicht ohneweiteres zugänglich ist, wird man hier besonders zu schätzen wissen, daß sie in dem Buche von STANWORTH in ebenso sachlich-objektiver wie angenehm lesbarer Wiedergabe verarbeitet ist. A. SMEKAL, Graz.

Die Struktur des freien Moleküls. Allgemeine physikalische Methoden zur Bestimmung der Struktur von Molekülen und ihre wichtigsten Ergebnisse. Von H. A. STUART. („Die Physik der Hochpolymeren.“ Herausgegeben von H. A. Stuart: 1. Band.) Mit 189 Textabb., XXI, 609 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1952. Geb. DM 69.—.

Das vorliegende Werk des bekannten Molekülforschers H. A. STUART stellt den ersten in sich völlig abgeschlossenen Band einer „Physik der Hochpolymeren“ dar. Gerade für den Physiker ist dieser Band von besonderem Interesse, da der Verfasser hier die allgemeinen Eigenschaften der Moleküle und ihre Untersuchungsmethoden ausführlich behandelt und damit dem Leser einen Überblick verschafft, welcher sonst wohl schwerlich nur durch die Lektüre eines Buches erworben wird. Die überaus klare Abgrenzung der Begriffsbildungen tragen wesentlich zu einem raschen und gründlichen Verstehen des Gelesenen bei.

STUART ist es in glänzender Weise gelungen ein Lehrbuch der Physik des Makromoleküles zu verfassen, welches das weitverzweigte Gebiet erschöpfend behandelt und gleichzeitig für den physikalischen Chemiker einen wertvollen Nachschlagebehelf darstellt. Das Buch vermittelt darüber hinaus eine Fülle von Anregungen in Richtung einer kritischen Überprüfung der verwendeten gebräuchlichen Verfahren. Auf komplizierte mathematische Ableitungen quantentheoretischer Natur wird bewußt verzichtet, in der richtigen Erkenntnis, daß diese auf alle Fälle unvollständig wären. Die Chemiker und Ingenieure werden mit den streng formulierten Problemstellungen und dem meist angegebenen klassischen, bzw. halbklassischen Lösungsweg vollauf zufrieden sein, während der Physiker durch die sehr ausführlichen Literaturhinweise in der Lage ist, ein spezielles Problem nachzulesen.

Von den 14 Kapiteln des Buches ist das erste den Valenz- und Molekular Kräften gewidmet und gibt eine sichere Grundlage zum Verständnis der folgenden Abschnitte. Besonders wäre hier die klare Abgrenzung der verschiedenen Formen VAN DER WAALScher Kräfte hervorzuheben. Die nächsten Abschnitte beschäftigen sich eingehend mit der Struktur der Moleküle und ihrer inneren Kinematik. Auf die Theorie der linearen hauptvalenzmäßig gebundenen Ketten oder der Fadenmoleküle, aus welchen die meisten hochpolymeren Substanzen bestehen, legt der Verfasser besonderes Gewicht. Für den Physiker bietet das 5., 6. und 7. Kapitel großes Interesse, in welchen aus den makroskopisch bestimmbar Größen, wie etwa der Dielektrizitätskonstanten, der RAYLEIGH-Streuung und der RAMAN-Streuung oder der elektrischen Doppelbrechung auf die Molekülstruktur geschlossen wird. Hier ist auch die Möglichkeit gegeben, mathematische Ableitungen zum Teil vollständig durchzuführen.

Im weiteren wird die klassische Ultrarottheorie eingehend behandelt, welche lange Zeit den wichtigsten Zugang zur Erforschung der Molekülstruktur bildete. Das letzte Kapitel von G. SCHEIBE und R. FAUSS verfaßt, paßt sich der Anlage des Buches völlig an und behandelt die Lichtabsorption in Verbindung mit der Molekülstruktur.

Alle Kapitel sind in einen theoretischen und einen experimentellen Teil gegliedert. Im letzteren werden die modernen Methoden zur Strukturuntersuchung wie Röntgenstreuung, Elektronen- und Neutronen-Streuung sowie Hochfrequenzspektroskopie neben dem klassischen Verfahren ausführlich dargestellt.

Die zahlreichen und sorgfältig ausgeführten Tabellen ergänzen die Ausführungen auf das Wertvollste und verleihen dem Buch den Charakter eines Nachschlagewerkes.

E. LEDINEGG, Graz.

Atomenergie und ihre Verwertung im Kriege. Offizieller Bericht über die Entwicklung der Atombombe. Von H. DE WOLF SMITH. Nach der erweiterten Ausgabe von 1946 übersetzt und erläutert von F. DESSAUER. 352 S. Basell Reinhardt-Verlag AG. 1947.

Vorliegende Übersetzung des schon im Jahre 1946 veröffentlichten offiziellen Berichtes ist von hohem allgemeinen Interesse. Sie ist nicht allein für den Naturwissenschaftler und Techniker bestimmt, sondern mehr für die Allgemeinheit. Zeigt sie doch, daß die Wissenschaft an sich einen entscheidenden Einfluß auf die geschichtliche Entwicklung der letzten Jahre genommen hat, trotzdem ihr vieles manchmal sehr einflußreiche Persönlichkeiten in dieser Hinsicht ihre Bedeutung abgesprochen haben. Dieser Bericht war auch der Ausgangspunkt des in weiteren Kreisen sehr geschätzten Büchleins über die Geschichte der Atombombe von Professor Dr. HANS THIRRING, da es die erste uns zugängliche Mitteilung nach dem Kriege war.

P. URBAN, Graz.

Angewandte Radioaktivität. Von K. E. ZIMEN. Mit 45 Textabbildungen und einer Tafel, VIII, 124 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1952. Geb. DM 18,80

Der Verfasser gibt einen Überblick über die prinzipiellen Möglichkeiten der angewandten Radioaktivität und die Wege, auf denen weitergearbeitet werden kann. Bisher gab es in deutscher Sprache keine moderne Darstellung dieses Fachgebietes. Infolge der jüngsten Forschungsergebnisse hat gerade die Anwendung in der biologischen, chemischen und physikalischen Forschung eine enorme Entwicklung genommen. Aber auch selbst in der medizinischen Praxis und in der Technik hat sie Eingang gefunden. Im ersten Teil des Werkes sind die grundlegenden Erkenntnisse der Radioaktivität und der Kernreaktionen zusammengestellt. Im zweiten Teil werden die prinzipiellen Möglichkeiten für die Anwendung der radioaktiven Atomarten als Strahlungsquellen und als radioaktive Indikatoren behandelt. Zahlreiche Beispiele illustrieren die verschiedenen Methoden und eine umfassende Literaturzusammenstellung erleichtert ein tieferes Eindringen. Zahlreiche praktische Angaben und Tabellen im dritten Teil erweisen sich als sehr nützlich für den Experimentalphysiker, der sich mit radioaktiven Stoffen vorwiegend befaßt. Die Auswahl des Gebotenen und die Art der Darstellung ist sehr zweckentsprechend. Das Buch ist daher jedem Physiker, der in dieser Fachrichtung arbeitet, wärmstens zu empfehlen.

P. URBAN, Graz.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a+b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

Korrekturen: Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen; auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Bei der Schriftleitung sind folgende Beiträge eingelangt:

(Änderungen in der Reihenfolge bei der Veröffentlichung müssen aus technischen Gründen vorbehalten bleiben.)

- Hinteregger, H.** Induktionserscheinungen bei Bewegung von Materie in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten. II: Translationsfälle. III: Theoretische Grundlagen für die Erfassung der allgemeineren Fälle. 10. X. 1951
- Überall, H. und F. Schlesinger.** Der Quadrupolübergang beim Kernphotoeffekt am Deuteron 6. IX. 1952
- Theimer, O.** Intensitätsprobleme beim RAMAN-Effekt 1. Ordnung 27. X. 1952
- Eder, G.** Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie 27. X. 1952
- Roesler, F. C.** Zur Magnetophotophorese 3. XI. 1952
- Lihl, F.** Die Koerzitivkraft von Feinstpulver-Preßmagneten auf der Basis Eisen-Kobalt 18. XI. 1952
- Preining, O.** Untersuchungen über Magnetophotophorese an zerstäubtem Silberstahl 3. XII. 1952
- Saller, H.** Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen in der Mechanik der speziellen Relativitätstheorie . . 5. XII. 1952
- Donnert, H.** Ableitung mathematisch äquivalenter Tensorgleichungen aus den DIRACSchen Spinorgleichungen für das Wellenfeld von Elementarteilchen nicht verschwindender Masse und beliebiger ganzer Spinquantenzahl 20. XII. 1952
- Birkenschenkel, H., R. Haefer und P. Mezger.** Feldelektronenmikroskopische Beobachtungen an Kathoden mit kubisch raum- und kubisch flächenzentrierter Gitterstruktur 10. II. 1953
- Seidl, Franziska.** Anwendung der Schlierenmethode in der Strömungslehre 10. II. 1953
- Ledinegg, E. und P. Urban.** Zur Theorie der Eigenschwingungen isotroper elastischer Medien 17. II. 1953
- Baumann, K.** Die relativistische Beschreibung von Bindungszuständen 23. II. 1953

Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

W. Mörikofer, Davos, und F. Steinhauser, Wien

Serie A: Meteorologie und Geophysik

Zuletzt erschienen:

5. Band, Heft 3

(Abgeschlossen im Dezember 1952)

Mit 38 Textabbildungen. 112 Seiten. 1953. S 90.—, DM 18.—, \$ 4.30, sfr. 18.40.

Inhaltsverzeichnis: FLOHN, H. Hochgebirge und allgemeine Zirkulation. II. Die Gebirge als Wärmequellen. — WAN-CHENG CHIU. On the Oscillations of the Atmosphere. — HOINKES, H. Probleme der alpinen Synoptik. — BAUM, WERNER A. and LAWRENCE B. SMITH. Semi-monthly Mean Sealevel Pressure Maps for the Mediterranean Area. — DUFOUR, L. Sur les transformations adiabatiques réversibles d'une goutte de solution en suspension dans l'atmosphère. — SCHWEITZER, H. Versuch einer Erklärung des Föhns als Luftströmung mit überkritischer Geschwindigkeit. — VERZAR, F. Kondensationskernzähler mit automatischer Registrierung.

Tschermaks Mineralogische und Petrographische Mitteilungen

Herausgegeben von

F. Machatschki, Wien, und H. Leitmeier, Wien

Dritte Folge

Zuletzt erschienen:

3. Band, Heft 1

(Ausgegeben im Oktober 1952)

Mit 21 Textabbildungen. 88 Seiten. 1952. S 86.—, DM 17.20, \$ 4.10, sfr. 17.80.

Inhalt: PADUROW, N. N. Laueaufnahmen auf zylindrischem Film. — PADUROW, N. N. Neue Zwillingsgesetze des Siliciumkarbids. — PRZIBRAM, K. Über die Färbungen des Fluorits. — NEUWIRTH, E. Röntgenuntersuchungen an steirischen Opalen und Chalcedonen. — FELLNER-FELDEGG, H. Strukturbestimmung von CsH_2PO_4 . — WIEDEN, P. und G. HAMILTON. Die Weißerde von Aspang. — RASZMANN, A. und HELGA LUTHLEN. Ein neuer Axinitfund in den Ostalpen. — KOKKOROS, P. Röntgensymmetrie von Mixit.

Elektrochemie

Theoretische Grundlagen und Anwendungen

Von

Dr. G. Milazzo

Istituto Superiore di Sanità, Rom, Prof. Inc. für Elektrochemie an der Universität Rom

Neubearbeitung der ersten italienischen Auflage

Ins Deutsche übertragen von Dr. W. SCHWABL, Wien

Mit 108 Textabbildungen. XIII, 419 Seiten. Lex.-8° 1952

Ganzleinen S 180.—, DM 36.—, \$ 8.60, sfr. 37.40

Zu beziehen durch jede Buchhandlung